OULUN YLIOPISTO
UNIVERSITY of OULU

PURSIAINEN RIINA & SUONTAKANEN TIIA

MILLAISIA YHTÄLÖITÄ MATEMATIIKAN OPPIKIRJAT SISÄLTÄVÄT? : Sisällönanalyysi kolmen kirjasarjan vuosiluokkien 1–3 opettajan oppaista

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA
Luokanopettajan koulutus
2016

OULUN YLIOPISTO
UNIVERSITY of OULU

Kasvatustieteiden tiedekunta
Faculty of Education

Tiivistelmä opinnäytetyöstä
Thesis abstract

Luokanopettajankoulutus	Tekijä/Author Pursiainen, Riina & Suontakanen, Tiia

Työn nimi/Title of thesis

Millaisia yhtälöitä matematiikan oppikirjat sisältävät? : Sisällönanalyysi kolmen kirjasarjan vuosiluokkien 1–3 opettajan oppaista

Pääaine/Major subject	Työn laji/Type of thesis	Aika/Year	Sivumäärä/No. of pages
Kasvatustiede	Pro gradu -tutkielma	toukokuu 2016	79 + 2

Tiivistelmä/Abstract

Yhtäsuuruuden käsitteellä on keskeinen rooli matematiikassa etenkin aritmetiikassa ja algebrassa. Siihen vaikutetaan kuitenkin kiinnitettävän vähän huomiota opetussuunnitelmissa ja opetusmateriaaleissa. Kansainvälisesti yhtäsuuruuden käsitteen muodostumista on tutkittu, mutta kotimaista tutkimusta aiheesta on hyvin vähän. Virheellinen käsitys yhtäsuuruudesta on osoittautunut vaikeuttavan myöhempää matematiikan opiskelua, minkä takia aihe tulisi huomioida laajemmin myös opetuksessa.

Tässä pro gradu -tutkielmassa käsitellään oppikirjojen yhtälöitä sisältäviä tehtäviä. Analysoitavaksi on valittu kolmen kirjasarjan vuosiluokkien 1–3 matematiikan opettajan oppaat, joista nähdään, miten tehtävät on tarkoitus ratkaista. Tutkimuksen tarkoitus on selvittää, millaisiin kategorioihin yhtälöitä sisältävät tehtävät voidaan jakaa. Lisäksi tutkimus havainnoi oppikirjojen välisiä eroavaisuuksia ja kategorioihin sisältyvien tehtävien vaihtelua vuosiluokkien välillä.

Tutkimukseen valittuja oppikirjoja tarkastellaan laadullisen sisällönanalyysin vaiheita seuraten. Käytetyt aineiston luokitteluperusteet nousevat niin aineistosta kuin teoriasta ja tunnetuista matemaattisista käsitteistä. Saaduista tuloksista muodostetaan johtopäätöksiä aiemman tutkimuksen pohjalta. Tutkimuksen luotettavuus pohjautuu pääosin tutkija- ja menetelmätriangulaatioon.

Tutkimuksesta saatujen tulosten mukaan oppikirjoissa on huomattava määrä yksipuolisia yhtälöitä sisältäviä tehtäviä, jotka toistavat usein samaa kaavaa. Tehtävien sisältämien yhtälöiden monipuolisuus kuitenkin lisääntyy valituissa kirjasarjoissa ylempiä vuosiluokkia kohti siirryttäessä. Kirjasarjat eroavat siinä, kuinka suuria poikkeavassa muodossa olevia yhtälöitä sisältävien tehtävien osuudet ovat. Tyypillisessä muodossa olevien yhtälöiden yksipuolinen kohtaaminen ohjaa oppilasta muodostamaan virheellisen yhtäsuuruuskäsityksen, jonka korjaaminen on hidas ja haastava kognitiivinen prosessi.

Asiasanat/Keywords matematiikka, oppikirjat, yhtäsuuruus, yhtälöt, laadullinen tutkimus, sisällönanalyysi

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Yhtäsuuruus matematiikassa **3**

2.1 Lauseke ja yhtälöt 3

2.2 Yhtäsuuruus ja yhtäsuuruusmerkki 4

2.3 Aritmetiikka ja algebra 5

3 Koulu ja käytäntö **6**

3.1 Matemaattisen tiedon muodostuminen 6

3.2 Yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen 7

3.2.1 Relationaalinen käsitys ja sen muodostuminen 11

3.2.2 Yhtäsuuruuskäsitteen muokkautuminen 13

3.3 Siirtyminen aritmetiikasta algebraan matematiikan opetuksessa 14

3.4 Yhtäsuuruus opetussuunnitelmassa 16

4 Toteutus **19**

4.1 Tutkimuskysymykset 19

4.2 Tutkimusmenetelmä 20

4.3 Aineistonkeruu 22

4.3.1 Luokittelukategoriat 26

5 Tulokset **29**

5.1 Kategorioihin sisältyviä tehtäviä 29

5.1.1 Kaato-kategoria 35

5.2 Tutkimukseen sisältyvien tehtävien kokonaismäärät 42

5.3 Tehtävien sijoittuminen kategorioihin 44

5.4 Tehtävien muodostamat kategoriayhdistelmät 48

5.5 Standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sisältävät tehtävät 51

6 Johtopäätökset **56**

6.1 Yhtälötyyppien vaikutus oppilaan käsitykseen yhtäsuuruudesta 57

6.1.1 Yhtälöiden moninaisuus oppikirja- ja tehtävätasolla 62

6.1.2 Matemaattisista säännöistä poikkeavat yhtälöt 63

6.2 Opetussuunnitelman ja oppikirjojen sisältöjen vaikutus tuloksiin 66

6.3 Tutkimuksen kehittäminen 67

6.4 Tutkimuksen eettisyys ja luotettavuus 69

7 Pohdinta **72**

Lähteet **75**

Liitteet (2)

1 Johdanto

Valitessamme tutkimusaihetta pro gradu -tutkielmaamme varten halusimme pitäytyä kandidaatintutkielmamme aiheessa. Kandidaatintutkielmamme otsikoksi valikoitui "Alakouluikäisten oppilaiden käsitys yhtäsuuruudesta". Kiinnostuimme aiheesta alun alkaen tutustuttuamme matematiikan didaktiikan kurssilla yhtäsuuruutta käsittelevään artikkeliin, joka toimii merkittävänä lähteenä työssämme. Aihetta ei ole juurikaan tutkittu Suomessa, mikä herätti meidät pohtimaan, saataisiinko suomalaista matematiikan opetusta tutkimalla samansuuntaisia tuloksia. Lisäksi omakohtaiset kokemukset algebraan siirtymisen vaikeudesta lisäsivät mielenkiintoa aiheeseen liittyen.

Vaikka tutkimus keskittyy yksittäiseen matemaattiseen symboliin, sen laajamittainen käyttö useilla matematiikan osa-alueilla korostaa aiheen tutkimisen tarvetta. Yhtäsuuruuden käsite esitellään jo aikaisessa vaiheessa matematiikan opetusta ja sitä sovelletaan aina korkeakouluopintoihin asti. Virheellinen käsitys yhtäsuuruudesta voi jopa saada oppilaan tuntemaan itsensä yleisesti taitamattomaksi matematiikassa. Koemme tällaisen tutkimuksen toteuttamisen kehittävän myös kriittistä suhtautumista opetusmateriaaleihin. Sokea materiaaleihin luottaminen ei kehitä opettajaa ammatissaan. Oppikirja-analyysimme tarkoitus on herättää ajattelemaan, millaisia käsityksiä oppikirjat välittävät yhdestä matematiikan oleellisimmasta termistä.

Tämän tutkimuksen toisessa luvussa määrittelemme keskeiset matemaattiset käsitteet. Käsitteitä pyritään avaamaan konkreettisten esimerkkien avulla, jotta ne eivät jää liian etäisiksi. Seuraavaksi nämä matemaattiset käsitteet yhdistetään käytäntöön ja tuodaan koulukontekstiin. Tutkimuksen teoriaosassa hyödynnetään kandidaatin tutkielmaamme. Matemaattisen tiedon muodostumista avataan yleisesti konstruktivistista oppimiskäsitystä mukaillen, mutta pääpaino on eritoten yhtäsuuruuteen liittyvän käsityksen muodostumisessa. Aritmetiikasta algebraan siirtyminen on tärkeä nivelvaihe matematiikan opiskelussa, johon myös yhtäsuuruus liittyy oleellisesti, ja tähän vaiheeseen perehdytään ulkomaisen tutkimuksen avulla. Opetussuunnitelman perusteet ovat kaiken opetuksen lähtökohta, joten tutkimuksessa avataan myös opetussuunnitelman asettamaa pohjaa yhtäsuuruuden käsitteen opettamiselle.

Tutkimme valittuja matematiikan 1.–3. vuosiluokan opettajan oppaita teoriaohjaavan sisällönanalyysin avulla. Tutkimukseen valittiin opettajan oppaat oppikirjojen sijaan siitä syystä, että ne näyttävät, miten kirjasarja olettaa oppilaiden ratkaisevan tehtävät. Käytetyt aineiston luokitteluperusteet nousevat osittain teoriasta ja tunnetuista matemaattisista käsitteistä, ja osittain aineistosta. Analyysin tarkoituksena on selvittää, millaisiin kategorioihin oppikirjojen tehtävät voidaan jakaa niiden sisältämien yhtälöiden perusteella sekä tarkastella kategorioihin sijoittuvien tehtävien määriä. Tutkimus havainnoi oppikirjojen välisiä eroavaisuuksia sekä tarkastelee vuosiluokkien välillä tapahtuvia muutoksia valittujen kirjasarjojen oppikirjoissa. Lopuksi analysoimme saatuja tutkimustuloksia aiempien yhtäsuuruutta ja aritmetiikasta algebraan siirtymistä käsittelevien tutkimusten valossa.

2 Yhtäsuuruus matematiikassa

Tässä luvussa määritellään tutkimuksen kannalta keskeisiä matemaattisia käsitteitä. Tähän yhtäsuuruutta käsittelevään tutkimukseen liittyvät yhtäsuuruuden ja yhtäsuuruusmerkin lisäksi läheisesti lausekkeen ja yhtälön käsitteet. Lisäksi aiheelle luodaan laajempaa perustaa esittelemällä aritmetiikan ja algebran käsitteet.

2.1 Lauseke ja yhtälöt

Lauseke muodostuu matemaattisista symboleista ja luvuista ilman yhtäsuuruusmerkkiä (Powell, 2012). Yhtälö puolestaan on kahden lausekkeen yhtäsuuruusrelaatio (Matematiikan käsikirja, 1993, s. 415). Matemaattinen yhtälö on yhtälö, jossa käytetään enintään yhtä muuttujaa, kun taas algebrallisessa yhtälössä on kaksi tai useampia muuttujia (Powell, 2012). Muuttujia kuvataan yhtälöissä useimmiten kirjaimilla, mutta muun muassa alakoulun oppikirjoissa oppilaat tutustuvat muuttujan käsitteeseen usein erilaisten symbolien ja kuvien avulla.

Yhtäsuuruuden käsitteen tutkimisessa on hyödynnetty erilaisia tehtävä- ja yhtälötyyppejä. Muun muassa Powell on tutkimuksessaan jaotellut tehtäviä niiden sisältämien yhtälötyyppien perusteella. Yhtälöitä jaotellessaan Powell on ensinnäkin erotellut avoimet yhtälöt suljetuista. Avoimessa yhtälössä on tyhjä tila yhtälön täydentävälle luvulle, kun taas suljetusta yhtälöstä ei puutu tietoja. Toisekseen hän on jaotellut yhtälöt tyypillisiin, epätyypillisiin ja epästandardeihin yhtälöihin. Jokainen näistä kolmesta yhtälökategoriasta voi sisältää sekä avoimia että suljettuja yhtälöitä. (Powell, 2012.)

Tyypillisessä yhtälössä vasemmalla puolella yhtäsuuruusmerkkiä on lauseke ja oikealla puolella pelkästään kysytty luku. Epätyypillisessä yhtälössä taas kysytty luku voi olla missä kohtaa lauseketta tahansa, mutta ei tyypillisessä muodossa. (Powell, 2012.) Tämän jaottelun mukaan epätyypillisiä yhtälöitä ovat esimerkiksi $4 = 8 - 4$ ja $8 = x + 3$. Lisäksi Powell on luokitellut epästandardeihin yhtälöihin ne, joissa kummallakaan puolella yhtäsuuruusmerkkiä ei ole lauseketta, esimerkiksi $4 = 4$, sekä yhtälöt, joissa on molemmin puolin lausekkeet, jotka sisältävät jonkin operaation, kuten $4 - 2 = x + 1$.

McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur ja Krill (2006) jaottelevat tutkimuksessaan yhtälöt ensin kahteen yläkategoriaan. Näistä ensimmäisen muodostavat standardit yhtälöt, jotka ovat Powellin (2012) käyttämän tyypillisen yhtälön kaltaisia. Tuntemattoman paikkaa ei kuitenkaan ole määrätty. Toiseen yläkategoriaan kuuluvat epästandardit yhtälöt, jotka jaetaan edelleen neljään kategoriaan, joista ensimmäisessä on molemmin puolin operaatio, toisessa operaatio on yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella, kolmannessa ei ole selkeää operaatiota ollenkaan ja neljännessä ovat epäyhtälöt.

2.2 Yhtäsuuruus ja yhtäsuuruusmerkki

Yhtäsuuruusmerkki on keskeisin symboli matematiikassa. Sitä käytetään määrittelemään yhtäsuuruusrelaatio, jossa yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret. Tieteessä yhtäsuuruusmerkkiä käytetään myös ilmaisemaan yhteyksiä, kuten E = mc2. (McNeil & Alibali, 2005a.) Yhtäsuuruusmerkin merkitys riippuu usein kontekstista (Freudenthal, 1983). Esimerkiksi yhtälöissä x2 + 2x + 1 = (x + 1)2 ja x2 + 2x + 1 = 0 yhtäsuuruusmerkillä on erilaiset tarkoitukset. Ensimmäisessä yhtälössä yhtäsuuruusmerkki tarkoittaa, että yhtälö on tosi kaikilla x:n arvoilla, mutta toisessa tapauksessa merkki tarkoittaa, että vain kahdella x:n arvolla yhtälön puolet ovat yhtä suuria.

Yhtäsuuruutta matemaattisesti määriteltäessä relaatio R joukossa A on yhteys joukon kaikkien alkioiden välillä (General Topology, 1998, s. 5). Yhtäsuuruus on ekvivalenssirelaatio, sillä se täyttää kolme tarvittavaa vaatimusta: se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen (Matematiikan käsikirja, 1993, s. 416). Relaatiota R joukossa A kutsutaan refleksiiviseksi, jos ja vain jos aRa jokaiselle $a \in A$ (General Topology, 1998, s. 5). Ekvivalenssirelaatiossa refleksiivisyys tarkoittaa siis, että jokainen luku on relaatiossa itsensä kanssa (2 = 2). Esimerkiksi järjestysrelaatiot eivät ole refleksiivisiä, sillä $2 < 2$ ei ole tosi.

Symmetriseksi relaatiota R kutsutaan, jos ja vain jos aRb implikoi bRa (General Topology, 1998, s. 5). Symmetriassa on kyse siitä, että yhtälössä olevien lausekkeiden paikkaa voi vaihtaa. Tärkeää on kuitenkin ymmärtää, että kyseessä ei ole peilikuvamainen symmetria, sillä esimerkiksi 2 : 1 = 1 : 2 pidä paikkaansa. Yhtälössä 3 + 5 = 4 + 4 lausekkeet voivat vaihtaa paikkaansa (4 + 4 = 3 + 5) ja yhtälö on yhä tosi. Aritmetiikan tehtävissä tyypillinen tapa jättää oikealle puolelle vain tyhjä paikka yhtälön täydentävälle luvulle ei korosta sitä, että yhtälön molempien puolien lausekkeiden paikkoja voitaisiin vaihtaa, minkä vuoksi tämä jää usein ymmärtämättä lapsilta (McNeil, 2013).

Kolmanneksi, relaatio R on transitiivinen, jos ja vain jos aRb ja bRc implikoi aRc kaikille a, b, c ∈ A (General Topology, 1998, s. 5). Transitiivisuus tarkoittaa, että esimerkiksi yhtälöistä x = y ja y = z voidaan tehdä johtopäätös, että x = z. Tämä voi olla vaikea käsite alakoulussa, sillä yhdessä tehtävässä olevia useampia erillisiä laskutoimituksia saatetaan laskea peräkkäin. Jos tehtävässä esimerkiksi kehotetaan laskemaan ensin yhteen luvut 2 ja 3, ja lisäämään saatuun tulokseen 1, voi oppilas laskea 2 + 3 = 5 + 1 = 6. Tällöin yhtäsuuruuden transitiivisuutta ei ole ymmärretty oikein, sillä esimerkiksi 2 + 3 = 5 + 1 ei pidä paikkaansa. Laskujen eri vaiheet tulisi ilmaista esimerkiksi allekkain erillisinä yhtälöinä, jolloin yhtäsuuruusmerkin kaikki kolme vaatimusta täyttyvät.

2.3 Aritmetiikka ja algebra

Aritmetiikka on peruslaskutoimitusten eli yhteenlaskun, vähennyslaskun, jakolaskun, kertolaskun, potenssiin korotuksen ja juurtamisen laskentaa kokonaisluvuilla (Matematiikan käsikirja, 1993, s. 31). Aritmetiikan perusteiden ymmärtäminen toimii pohjana algebrallisen ajattelun kehittymiselle.

Algebrallinen päättely on kaavojen ja säännöllisyyksien yleistämistä ja muodollistamista, sekä yleistettyä aritmetiikkaa ja sääntöjen ohjaamaa yhtälönratkaisua. Algebra on myös laskuja ja suhteita abstraktimpien rakenteiden ja systeemien sekä funktioiden, relaatioiden ja useiden muuttujien suhteiden tutkimista. Näiden lisäksi algebra on mallintamista. (Kaput, 1998.) Nämä kaikki algebrallisen päättelyn muodot liittyvät oleellisesti toisiinsa ja algebran tehtävien ratkaisu edellyttää usein erilaisten muotojen yhdistämistä. Voidaan kuitenkin kyseenalaistaa, onko kaavojen muodostaminen aina algebrallista päättelyä. Lukujonoista ja kuvasarjoista on mahdollista muodostaa kaavoja myös arvaamalla ja kokeilemalla. Tällainen menettely edellyttää ainoastaan aritmeettisten käsitteiden hallitsemista, eikä algebralliselle ajattelulle ominaista päättelyä. (Radford, 2015.) Analyyttinen ajattelu ja tuntemattoman käsittely tekevät ajattelusta algebrallista, jolloin pelkkä oikeaan ratkaisuun päätyminen ei ole todiste algebran hallitsemisesta.

3 Koulu ja käytäntö

Edellä esitellyt matemaattiset käsitteet yhdistetään tässä luvussa koulukontekstiin. Yhdistämisessä hyödynnetään aiheesta tehtyä tutkimusta ja suomalaista perusopetuksen opetussuunnitelmaa. Keskitymme yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtämiseen, johon liittyvät olennaisesti matemaattisen tiedon muodostuminen ja aritmetiikasta algebraan siirtyminen.

3.1 Matemaattisen tiedon muodostuminen

Matemaattinen tieto voidaan jakaa konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tietoon. Konseptuaalinen tieto liitetään oleellisten periaatteiden ymmärtämiseen, kun taas proseduraalisella tiedolla tarkoitetaan kykyä ratkaista erilaisia ongelmia. Vaikka ne erotellaan toisistaan, ne kehittyvät usein vuorovaikutuksessa toistensa kanssa ja täten näiden tietojen kehitystä on haastava seurata toisistaan irrallisina. (Rittle-Johnson & Alibali, 1999.) Booth ja Davenport (2013) ovat tutkineet konseptuaalisen tiedon merkitystä yhtälönratkaisussa. Tutkimuksessa etenkin yhtäsuuruusmerkkiin liittyvän konseptuaalisen tiedon hallitsemisen nähtiin olevan yhteydessä oikean ratkaisun löytämiseen. Siten yhtälöä ratkaistaessa on oleellista ymmärtää oikein yhtäsuuruuteen ja yhtäsuuruusmerkkiin liittyvät periaatteet. Algebran opiskelussa pelkästään eri vaiheiden osaaminen ei riitä, vaan tärkeämpää on ymmärtää erilaiset käsitteet ja periaatteet.

Matemaattisen tiedon luonteeseen kuuluu, että uusi tieto rakentuu aikaisemmin opitun pohjalta. Tällöin useat tietorakenteet nivoutuvat toisiinsa ja yhden matemaattisen konseptin hallitseminen vaatii useamman muun konseptin ymmärtämistä. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan kokemukset muokkaavat oppijan tapaa käsitellä ja nähdä asioita, mikä taas vaikuttaa oppijan tapaan sisäistää tuleva tieto. Syntyy tiedonjäsentymisen jatkumo, jossa jokainen kokemus sekä saa vaikutteita aikaisemmista että muokkaa tulevia. (Dewey, 1938/1988.) Tieto rakentuu aikaisemman pohjalle joko sulauttamalla tai mukauttamalla. Sulauttamisella tarkoitetaan uuden tiedon liittämistä olemassa oleviin tietorakenteisiin. Mukauttamisella taas viitataan tilanteeseen, jossa uusi tieto on ristiriidassa aikaisemman kanssa ja oppijan täytyy muokata ja mukauttaa niitä muodostaakseen uuden yhtenäisen tietorakenteen. Mukauttaminen on huomattavasti vaikeampi prosessi etenkin, jos oppija joutuu muokkaamaan varhain arjen kokemusten pohjalta muotoutuneita tietorakenteita. (Tynjälä, 2000.) Useat yhtäsuuruutta koskevien tutkimusten tulokset tukevat konstruktivistista oppimiskäsitystä.

Muodostuneen virheellisen käsityksen korjaaminen näyttää olevan haastavaa, sillä useissa tutkimuksissa oppilaiden on havaittu tulkitsevan yhtäsuuruusmerkin virheellisesti jopa yläkoulun puolella (muun muassa Kieran, 1981; McNeil & Alibali 2005a). Oppilaat vaikuttavat myös olevan taipuvaisempia käyttämään opittuja tietorakenteita, vaikka uuden asian hallitseminen vaatisi niiden mukauttamista. McNeil ja Alibali tutkivat, kuinka tarkasti oppilaat pystyvät toistamaan yhtälön tarkasteltuaan sitä lyhyen aikaa. Eniten virheitä oppilaat tekivät yhtälöissä, jotka olivat osittain samankaltaisia kuin totutut muotoa 2 + 2 = x olevat yhtälöt, mutta eivät täysin vastanneet niitä. (McNeil & Alibali, 2004.) Toisin sanoen oppilaat yrittivät yhdistää uuden yhtälörakenteen aikaisemmin tuntemaansa yhtälörakenteeseen, vaikka tietorakenteiden välillä oli pieniä ristiriitoja. Ristiriidat eivät kuitenkaan olleet niin huomattavia, että oppilaat olisivat ryhtyneet muokkaamaan aikaisemmin opittua.

Usein lapset saavat jo ennen kouluikää kokemuksia yhtäsuuruuden käsitteestä esimerkiksi laskiessaan ja jakaessaan esineitä tasan tietyn kokoisen ryhmän kesken. Jo päiväkoti-ikäisillä lapsilla vaikuttaa olevan vääränlaisia käsityksiä yhtäsuuruusmerkistä. Lapsille esitettiin epästandardissa muodossa oleva yhtälö (8 + 4 = x + 5), eivätkä he osanneet ratkaista sitä oikein edes konkreettisilla esineillä tehdyn mallintamisen jälkeen. Tutkijat havaitsivat, että yhtäsuuruuden ilmaisu esineillä ei tuottanut vaikeuksia, toisin kuin symbolinen ilmaisu. (Falkner, Levi & Carpenter, 1999.) Kokemusten myötä lapsille muodostuu heidän tiedostamattaan käsitys yhtäsuuruudesta, joka ei välttämättä vastaa matemaattista määritelmää. Juurtuneiden käsitysten korjaaminen myöhemmin on vaativa kognitiivinen prosessi. Mukauttamisen sijaan oppilas saattaa säilyttää arkiset tietorakenteensa ja sisäistää uuden tiedon väliaikaisesti (Tynjälä, 2000). Oppilas saattaa esimerkiksi koetta varten opetella ulkoa tietyt matemaattiset säännönmukaisuudet, mutta todellista oppimista ei tapahdu ja uusi tieto unohtuu ajan myötä.

3.2 Yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen

Yhtäsuuruusmerkin ja yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtäminen oikein on erittäin oleellista algebrallisen ajattelun kehityksen kannalta (Falkner et al., 1999; Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil & Stephens, 2008; Mann, 2004). Useat tutkimukset ovat osoittaneet, että suurella osalla pohjoisamerikkalaisista alakouluikäisistä oppilaista on virheellinen käsitys yhtäsuuruusmerkistä ja he tulkitsevat sen käskynä toteuttaa annettu operaatio ja ilmoittaa vastaus merkin jälkeen. Vähemmistö oppilaista taas tulkitsee yhtäsuuruusmerkin ilmaisevan lausekkeiden välistä yhtäsuuruutta. (Falkner et al., 1999; Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998; Stephens, Knuth, Blanton, Isler, Murphy Gardiner & Marum, 2013.)

Falkner ja muut esittivät Yhdysvalloissa toteutetussa tutkimuksessaan useille eri luokka-astetta edustaville oppilaille seuraavan ongelman: 8 + 4 = x + 5. Projektiin osallistuneista ensimmäisen luokan oppilaista yksikään ei osannut ratkaista tehtävää oikein. Enemmistö lapsista oli suorittanut yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella olevan laskutoimituksen ja ilmoittanut sen tuloksen tyhjään kohtaan tulkiten yhtäsuuruusmerkkiä virheellisesti. Osa taas oli laskenut yhteen kaikki annetut luvut saaden vastaukseksi 17. Kolmannen luokan oppilaista taas kymmenesosa kykeni ratkaisemaan ongelman osoittaen siten tulkitsevansa yhtäsuuruusmerkin oikein. Ongelma esitettiin myös kuudennen luokan oppilaalle, joista kukaan ei osannut ratkaista sitä oikein. (Falkner et al., 1999.) Tutkimuksen tuloksista onkin havaittavissa, että ensimmäisestä luokasta kolmanteen luokkaan asti ongelman oikein ratkaisseiden oppilaiden osuus kasvoi, mutta kolmannesta luokasta kuudenteen luokkaan asti osuus laski.

Sáenz-Ludlow ja Walgamuth tarkastelivat vuoden mittaisessa opetuskokeilussaan erään yhdysvaltalaisen alakoulun kolmannen luokan oppilaiden käsityksiä yhtäsuuruudesta. Artikkelissa esitellyt opettajan ja oppilaiden välillä tapahtuneet keskustelut osoittavat, että opetuskokeilun alussa lähes kaikilla oppilailla oli virheellinen käsitys yhtäsuuruusmerkistä. Vuoden mittaan yhdessä käytyjen keskustelujen kautta oppilaat saivat jakaa käsityksiään ja pystyivät mukauttamaan omaa käsitystään yhtäsuuruusmerkistä. (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998.) Tutkimus osoittaa, että vaikka oppilas olisi jo ehtinyt muodostaa virheellisen käsityksen yhtäsuuruudesta, on siihen mahdollista vaikuttaa. Kun oppilaat saadaan tiedostamaan omat käsityksensä, voivat he myös helpommin muokata niitä.

Stephens ja muut ovat tutkineet eräässä yhdysvaltalaisessa alakoulussa 3.–5. luokan oppilaiden käsityksiä yhtäsuuruusmerkistä. Kyselytutkimuksesta saadut vastaukset jaoteltiin kolmeen kategoriaan oppilaan tekemän tulkinnan tason mukaan. Kolmasluokkalaisista vajaa puolet määritteli yhtäsuuruusmerkin käskyksi toteuttaa annettu operaatio ja ilmoittaa vastaus merkin jälkeen, kun taas viidesluokkalaisista reilu puolet käytti vastaavaa määritelmää. Kuitenkin viidesluokkalaiset käyttivät kolmasluokkalaisia useammin yhtälönratkaisustrategioita, jotka osoittivat oppilaan tulkitsevan yhtäsuuruusmerkin kahden lausekkeen välistä yhtäsuuruutta kuvaavana symbolina. (Stephens et al., 2013.) Tutkimuksen tuloksista havaittavissa oleva kehitys vuosiluokkien välillä on osittain samansuuntainen kuin Falknerin ja muiden (1999) tutkimuksessa. Stephensin ja muiden (2013) tutkimuksessa viidesluokkalaisten virheelliset käsitykset vaikuttivat kuitenkin jo osittain korvautuneen oikealla käsityksellä.

Nämä tutkimukset ovat kaikki toteutettu Pohjois-Amerikassa, joten niistä ei voida tehdä suoria johtopäätöksiä suomalaisen matematiikan opetuksen vaikutuksista oppilaiden tulkintoihin yhtäsuuruudesta. Suomalaista tutkimusta aiheesta ei juurikaan ole tehty, mutta ulkomaalaiset tutkimukset tarjoavat oleellisia näkökulmia aiheeseen liittyen.

3.2.1 Operationaalinen käsitys ja sen muodostuminen

Aritmetiikan opetuksessa laskut esitetään usein tyypillisessä muodossa, jossa yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella on laskettava lauseke ja oikealla puolella tyhjä paikka vastaukselle (McNeil et al., 2006). Tällöin yhtäsuuruusmerkki merkitsee lähinnä sitä, että vasemman puolen luvuille täytyy suorittaa käsketyt laskutoimitukset, jotta vastaus saadaan oikealle puolelle (McNeil, Chesney, Matthews, Fyfe, Petersen, Dunwiddie & Wheeler, 2012). Kohdattuaan liian pitkään tässä perinteisessä muodossa olevia ongelmia, oppilaalle muodostuu helposti operationaalinen käsitys yhtäsuuruusmerkistä.

Yhtäsuuruusmerkin operationaalisella tavalla ymmärtävät oppilaat eivät näe, että yhtäsuuruusmerkki ilmaisee yhtäsuuruusrelaatiota eli kahden lausekkeen välistä yhtäsuuruutta. Tällöin yhtäsuuruusmerkki tulkitaan käskynä tehdä jotain. Heillä voi olla vaikeuksia ymmärtää yhtälöitä kuten $7 = 7$ ja $6 = 1 + 5$, sillä ensimmäisessä yhtälössä ei ole mitään varsinaista laskutoimitusta ja toisen yhtälön voi mieltää olevan väärinpäin. (Stephens et al., 2013.) Myös yhtälöt, joissa on laskuoperaatio yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin, voivat tuottaa vaikeuksia. Yhtäsuuruusmerkin operationaalisesti tulkitseva oppilas saattaa muotoa $2 + 3 = x + 4$ olevan yhtälön kohdatessaan joko laskea kaikki luvut yhteen ja ilmoittaa vastauksen yhtäsuuruusmerkin jälkeen tai jättää oikeanpuoleisen operaation huomioimatta. (Falkner et al., 1999.)

Carpenter, Franke ja Levi, Baroody ja Ginsburg, sekä Seo ja Ginsburg ovat esittäneet, että virheelliset tulkinnat yhtäsuuruusmerkistä olisivat ainakin osittain peräisin alakoulussa saaduista kokemuksista (Knuth et al., 2006). Operationaalisen käsityksen muodostumiseen on löydetty eri tutkimuksissa useita erilaisia koulumaailmaan linkittyviä syitä.

Aikaisemmat tutkimukset ovat nähneet erilaisten kognitiivisten puutteiden olevan pääosin oppilaiden virheellisten käsitysten taustalla (muun muassa Herscovics & Linchevski, 1994). Nykyaikaisemmat tutkimukset ovat puolestaan painottaneet oppilaiden puutteiden sijaan niitä tietorakenteita ja taitoja, joita heillä jo on. Esimerkiksi McNeilin ja Alibalin (2005a) mukaan oppilaiden yhtälönratkaisuun liittyvien vaikeuksien taustalla on liiallinen aritmeettisten laskutoimitusten harjoittelu. Algebrallisen ajattelun kehittäminen tulisi aloittaa rinnakkain aritmetiikan opiskelun kanssa sen sijaan, että näitä kahta käsiteltäisiin erillisinä kokonaisuuksina (Carpenter & Levi, 2000). Nämä teoriat ja näkemykset mukailevat enemmän nykyaikaisia oppimiseen liittyviä käsityksiä.

Aritmetiikassa käytettyjen yhtälörakenteiden samankaltaisuus on myös laajalti nähty yhtenä syynä virheellisten käsitysten muodostumiseen. Aritmeettisissa ongelmissa yhtäsuuruusmerkki ja vastaukselle annettu tyhjä tila ovat ongelman lopussa. Myöhemmin kohdattavat korkeamman tason ongelmat eivät usein noudata tätä kaavaa, ja oppilaat tekevät todennäköisemmin virheitä yrittäessään soveltaa opittua kaavaa uudentyyppisiin ongelmiin (McNeil & Alibali, 2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2015) matematiikan opetuksen päätehtäväksi nimetään ensimmäisellä ja toisella vuosiluokalla muun muassa vahvan pohjan luominen laskutaidolle. Yksipuolinen laskutoimitusten ratkominen voi saada aikaan tiukkaan juurtuneita käsityksiä matemaattisista symboleista ja ongelmanratkaisustrategioista.

Merkitysten luominen matemaattisille symboleille on monimutkainen kognitiivinen prosessi. Yhteen symboliin kytkeytyy valtava määrä erilaisia matematiikan sisältöjä, joiden sisäistäminen ei tapahdu automaattisesti symbolin käyttämisen myötä. (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998.) Aritmetiikassa käytettyjen symbolien lukeminen ja kirjoittaminen ovat nopeasti opittavia taitoja, mutta lapsien vähäinen kokemus matematiikan opiskelusta voi vaikuttaa yhtäsuuruusmerkin käsitteen sisäistämiseen (Kieran, 1981). Sisäistämisen ja todellisen ymmärtämisen monimutkaisuus johtuu osittain sanallisen ilmaisun ja symbolin tarkan määritelmän vastaavuuden epätarkkuudesta. Samalle symbolille on puhekielessä useita eri ilmaisuja, joiden merkitykset poikkeavat hieman toisistaan. (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998) Yhtälö $5 - 2 = 3$ voidaan lukea esimerkiksi “kun viidestä vähennetään kaksi, saadaan tulokseksi kolme”, “viisi miinus kaksi on kolme” tai “viisi miinus kaksi on yhtä suuri kuin kolme”. Vaikka kaikissa kuvataan samaa asiaa, kahdessa ensimmäisessä esimerkissä yhtäsuuruusmerkin todellinen merkitys vääristyy. Freudenthalin (1983) mukaan puhekielen ilmaisutapojen taustalla ovat aina oppijan läpikäymät ajatteluprosessit.

Voitaisiinkin kyseenalaistaa, käytetäänkö alakoulun matematiikan opetuksessa riittävästi aikaa yhtäsuuruusmerkin yksityiskohtaiseen käsittelyyn. Sáenz-Ludlow ja Walgamuth (1998) ovat tutkimuksessaan havainnoineet luokassa käytyjä keskusteluja ja päätelleet niistä, että oppilailta on epärealistista odottaa heti yhtäsuuruuden käsitteen syvällistä ymmärtämistä. Heidän mukaansa opettajien tulisi tarjota oppilaille jatkuvasti merkityksellisiä ja johdonmukaisia kokemuksia, jotka edistäisivät oppilaan käsitteenmuodostusta ja yhtäsuuruuden ymmärtämistä.

3.2.2 Relationaalinen käsitys ja sen muodostuminen

Relationaalisesti ajatteleva näkee yhtäsuuruusmerkin merkkinä kahden lausekkeen välisestä suhteesta (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey, 2007). Oppilaat, joilla on relationaalinen käsitys yhtäsuuruusmerkistä, kykenevät käsittelemään joustavammin tyypillisestä muodosta poikkeavia yhtälöitä. Siinä missä operationaalisesti yhtäsuuruusmerkin tulkitsevilla oppilailla on vaikeuksia ymmärtää yhtälöitä kuten $4 = 4$, $10 = 2 + 8$ ja $1 + 3 = x + 2$, on relationaalisesti ajattelevilla oppilailla paremmat valmiudet käsitellä niitä. (Falkner et al., 1999.) Relationaalisesta tulkintatavasta on hyötyä myöhemmin matematiikan opiskelussa, sillä yhtäsuuruusmerkin oikein tulkitsevat oppilaat ratkaisevat todennäköisemmin yhtälöt oikein. Relationaalinen näkemys yhtäsuuruusmerkistä onkin edellytyksenä merkitykselliselle yhtälöiden ratkaisemiselle. (Knuth et al., 2006.) On eri asia ratkaista yhtälö etenemällä ulkoa opeteltujen sääntöjen ja vaiheiden mukaan kuin ymmärtää syvällisemmin yhtälönratkaisun taustalla olevat periaatteet. Relationaalinen tapa tulkita yhtäsuuruusmerkkiä on kehittynein ja sitä tarvitaan, jotta voidaan todella ymmärtää algebraa.

Relationaalisesti ajatteleva voi hyödyntää laskemisessa myös lukujen välisiä yhteyksiä tai ratkaista yhtälöitä aritmetiikan avulla. Esimerkiksi yhtälön $25 + 59 = x + 23$ voi ratkaista kokeilemalla tai aritmeettisesti. Toisaalta huomion voi kiinnittää myös lukujen 25 ja 23 väliseen yhteyteen. Molemmissa tavoissa käytetään relationaalista ajattelua, mutta jälkimmäinen edellyttää kehittyneempää ajattelua sekä syvällisempää ymmärrystä yhtäsuuruuden käsitteestä ja yhtälönratkaisuun liittyvistä periaatteista. (Jacobs et al., 2007.) Relationaalinen käsitys yhtäsuuruudesta ei siis tarkoita, että oppilas osaa hyödyntää lukujen välisiä yhteyksiä. Aritmetiikkaan turvautuvat oppilaat eivät kykene käsittelemään lausekkeita sellaisenaan, vaan heidän täytyy varmistaa lausekkeiden välinen yhtäsuuruus laskemalla. Oppilaat, joilla on syvällisempi ymmärrys yhtäsuuruudesta, pystyvät näkemään lausekkeet laajemmin kuin vain laskettavina tehtävinä. (Stephens et al., 2013.) Yhtälö sellaisenaan ei usein vielä määritä ratkaisutapaa, mutta oppilasta voidaan ohjata käyttämään kehittyneempiä strategioita, jotka ovat ominaisia algebralliselle ajattelulle.

McNeil ja Alibali (2005a) pohtivat tutkimuksessaan myös, miten käsitys yhtäsuuruusmerkistä muodostuu. Yhdysvaltalaisessa matematiikan opetuksessa ei keskitytä yhtäsuuruusmerkkiin itsessään, vaan oppilaat tekevät oman tulkintansa kokemustensa perusteella, minkä myötä operationaalinen käsitys usein syntyy. Sitä, miten operationaalinen käsitys muuttuu relationaaliseksi, on kuitenkin tutkittu melko vähän. Yleisesti taitekohtana pidetään yläkoulun alkua, jolloin algebran osuus opetuksessa lisääntyy. 11–13-vuotiaat osaavat ratkaista yhtälöitä relationaalisesti, vaikka määrittelevätkin yhtäsuuruusmerkin yhä operationaalisesti. Oppilaiden käsitys yhtäsuuruudesta muuttuu vähitellen. Aluksi esimerkiksi yhtälöitä, joissa yhtäsuuruusmerkin jälkeen on operaatio, saatetaan pitää poikkeuksina. Kun tällaisia yhtälöitä käsitellään tarpeeksi, käsitys muuttuu ja yhtäsuuruusmerkki assosioituu vastauksen antamisen sijaan yhtäsuuruuteen. (McNeil & Alibali, 2005a.) Mikäli opetus tähtää alkuopetuksesta asti relationaalisen käsityksen kehittymiseen, ovat myöhemmin opetettavat sisällöt oppilaalle helpompia sisäistää.

Falkner ja muut (1999) sekä Sáenz-Ludlow ja Walgamuth (1998) ovat tutkimuksissaan havainneet, että yhteisöllisyyden merkitys on suuri yhtäsuuruuden oppimisessa ja operationaalisen käsityksen korjaamisessa. Keskustellessaan toisten kanssa oppilaat pyrkivät kehittämään uusia tapoja perustella ratkaisujaan ja samalla jakavat ymmärrystään muille luokkalaisilleen (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). Ryhmässä keskustelu ja omien päätelmien selittäminen muille auttavat oppilasta ulkoistamaan ajatteluaan ja tulemaan tietoisemmaksi omista toimintatavoistaan. Ajattelun ulkoistaminen vaatii oppilaalta usein monimutkaisempia ajatteluprosesseja, mikä puolestaan tehostaa asioiden syvällisempää oppimista. (Tynjälä, 2000.) Ryhmätyöskentelyn käyttö yhtäsuuruuden syvällisemmän ymmärtämisen ja relationaalisen käsityksen muodostumisen tukena olisi perusteltua alkuopetuksesta lähtien. Ryhmässä keskustelu auttaa oppilaita rakentamaan aktiivisesti omia tietorakenteitaan ja muokkaamaan virheellisiä käsityksiä.

Ihannetapauksessa matematiikan opetuksessa voitaisiin lähteä oletuksesta, että oppilaalle ei olisi ehtinyt muodostua operationaalista käsitystä yhtäsuuruudesta. Falkner ja muut (1999) havaitsivat tutkimuksessaan, että jo päiväkoti-ikäiset lapset kykenivät havainnollistamaan yhtäsuuruutta esinejoukkojen avulla, mutta saman yhtäsuuruusrelaation esittäminen symbolisesti tuotti vaikeuksia. Tästä voidaan päätellä, että lapsille on ehtinyt arkikokemusten kautta muodostua virheellisiä käsityksiä yhtäsuuruusmerkin tarkoituksesta ennen kouluikää. (Falkner et al., 1999.) Onkin syytä pohtia, voidaanko esi- ja alkuopetuksen matematiikan opetuksessa olettaa, ettei oppilaille ole ehtinyt muodostua minkäänlaista käsitystä yhtäsuuruudesta.

3.2.3 Yhtäsuuruuskäsitteen muokkautuminen

McNeil (2007) on tutkinut oppilaiden iän ja matemaattisen kehittymisen välistä yhteyttä tutkimuksessaan, johon osallistui 6–8-vuotiaita, 8–10-vuotiaita ja 10–14-vuotiaita yhdysvaltalaisia oppilaita. Useissa aiemmissa tutkimuksissa syyksi oppilaiden heikkoon menestykseen yhtälöiden ratkaisemisessa alakoulussa on esitetty, että lapsilta puuttuu ne kognitiiviset taidot, joita he tarvitsevat ongelmien ratkaisuun (muun muassa Haverty, Koedinger, Klahr & Alibali, 2000; Herscovics & Linchevski, 1994). McNeilin mukaan syy on kuitenkin enemmän oppilailla jo olevassa tiedossa, operationaalisessa käsityksessä yhtäsuuruudesta. Opittu operationaalinen käsite yhtäsuuruudesta on ristiriidassa algebran sisältöjen kanssa, jolloin vanha tieto hidastaa uuden oppimista. (McNeil, 2007.) Kyse ei siis sinällään ole ikäsidonnaisesta osaamisesta, vaan siitä, millaista tietoa ja kokemuksia oppilas on saanut. Tutkimuksissa oppilaiden tietojen ja kokemusten lähteenä nähdään pääasiassa kouluissa käytetyt kirjalliset materiaalit.

McNeilin (2007) tutkimuksen mukaan 6–8-vuotiaat suoriutuvat yhtäsuuruuteen liittyvistä tehtävistä paremmin kuin 8–10-vuotiaat, sillä 6–8-vuotiaat ovat vasta aloittaneet aritmetiikan opiskelun, eikä laskukaavoista ole vielä muodostunut automaattisia toimintamalleja. Tämän ikäisillä lapsilla on vaikeuksia työstää laskuja kokemuksen puuttumisen vuoksi, mutta toisaalta he osaavat ratkaista yhtäsuuruusongelmia verrattain hyvin. 8–10-vuotiaat ovat opiskelleet jo niin paljon aritmetiikkaa, että operationaaliset toimintamallit ovat vahvistuneet hankaloittaen yhtälönratkaisua. 10–14-vuotiailla algebran opetus taas on jo syrjäyttänyt operationaalista käsitystä yhtäsuuruudesta. (McNeil, 2007.)

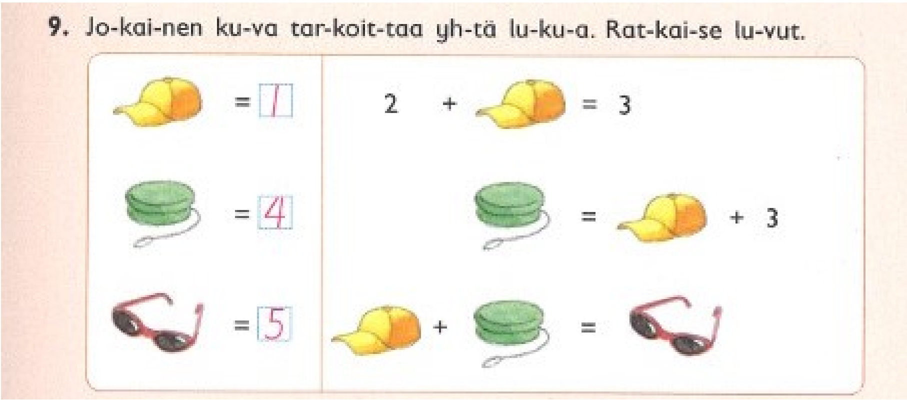
Stephens ja muut (2013) puolestaan vertailevat kolmas- ja viidesluokkalaisia. Kolmasluokkalaisiin verrattuna suurempi osa viidesluokkalaisista määritteli yhtäsuuruusmerkin operationaalisesti, mutta ratkaistessaan yhtälöitä viidesluokkalaiset käyttivät useammin relationaalista strategiaa. (Stephens et al., 2013) Nämä tulokset eroavat hieman aiemmista, mutta viidesluokkalaiset kuitenkin osoittivat merkkejä operationaalisen ajattelutavan syrjäyttämisestä. Nämä tulokset antavat viitteitä selkeästä kehityskaaresta: oppilaiden suoriutuminen yhtäsuuruuteen liittyvissä ongelmissa heikkenee ensimmäisten kouluvuosien aikana, mutta operationaalinen käsitys syrjäytyy vähitellen algebran opetuksen lisääntyessä.

McNeil (2007) on käyttänyt kuvatusta kehityksestä nimitystä “U-shaped development”, joka kuvastaa kehityksen kulkua ensin laskevana ja myöhemmin nousevana. Toisessa tutkimuksessaan McNeil (draft) on käyttänyt samanlaisesta kehityksestä nimitystä “change-resistance account”. Käsite korostaa, kuinka muodostettujen käsitysten korjaaminen vaatii aikaa ja säännönmukaista työstämistä. Aritmetiikan yksipuolinen opiskelu ohjaa oppilaita muodostamaan virheellisen käsityksen yhtäsuuruudesta. Myöhemmin esitellyt algebran perusteet ovat ristiriidassa tämän käsityksen kanssa, ja virheelliset käsitykset alkavat korjaantua. Kehitys on kuitenkin hidasta, sillä uuden asian sisäistäminen on kognitiivisesti haastavampaa, mikäli se on ristiriidassa aikaisempien tietorakenteiden kanssa. Tässä tutkimuksessa kuvatusta kehityksestä käytetään nimitystä muutosvastaisuus.

Oppilaiden yhtäsuuruuteen liittyviä käsityksiä tutkittaessa on saatu myös edellä esitellystä suuntauksesta eroavia tuloksia. Falkner ja muut (1999) ovat saaneet aivan päinvastaisia tuloksia ja todenneet alakoulun aikana kehityksen ensin nousevan ja sitten laskevan. Knuth, Stephens, McNeil ja Alibali (2006) taas ovat Pohjois-Amerikassa toteutetun tutkimuksensa tulosten perusteella todenneet, että harva yläkouluikäinen oppilas tulkitsee yhtäsuuruusmerkin relationaalisesti, eikä yhtäsuuruuden ymmärtämisessä näytä tapahtuvan juurikaan kehitystä yläkoulun aikana. Tutkimustuloksissa esiintyneet ikään ja yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtämiseen liittyneet ristiriidat voivat johtua esimerkiksi alueellisista ja opetuksellisista eroista. Myös käytetyn tutkimusmetodin ja yhtäsuuruusmerkin kontekstin merkitys voi nousta saatujen tulosten kannalta suureksi.

3.3 Siirtyminen aritmetiikasta algebraan matematiikan opetuksessa

Aritmetiikasta algebraan siirtyminen koetaan ongelmalliseksi vaiheeksi oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymisessä. Aritmetiikan perustaitojen aikainen hallitseminen on nähty oleellisena pohjana kehittyneemmälle ajattelulle ja ongelmanratkaisulle, mikä näkyy myös opetussuunnitelmissa. Pohjois-Amerikassa aritmeettisiin laskutoimituksiin perehdytään huolella vuosien ajan ennen kuin siirrytään monimutkaisiin yhtälöihin. (McNeil & Alibali, 2004.) Suomalaisissa oppikirjoissa painotus on ensimmäisillä vuosiluokilla aritmetiikan harjoittelussa, mutta tuntemattomia ratkaistaan yhtälöistä hyvin varhaisessa vaiheessa. Esimerkiksi kuvassa 1 oppilaan tulee ratkaista tuntemattomien arvo useammasta yhtälöstä. Yhtälöiden ratkaisu ei kuitenkaan edellytä oppilaalta varsinaista algebrallista ajattelua, sillä oikeaan ratkaisuun voi päätyä vain aritmetiikkaa hyödyntämällä.



Kuva 1. Tuntemattomien merkitseminen kuvilla. Teoksesta “Tuhattaituri 1a: Opettajan opas”, Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J., 2012, s. 53. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Pohjoisamerikkalaiset oppilaat ovat alakoulun loppuun mennessä ehtineet osittain tiedostamattaan perehtyä myös erilaisiin aritmetiikassa havaittaviin kaavoihin. Kaikki nämä kaavat eivät kuitenkaan päde myöhempiin algebrassa kohdattaviin korkeamman tason ongelmiin. Aritmetiikassa yhtäsuuruusmerkki ja tuntematon ovat useimmiten ongelman lopussa. Algebrassa taas monet ongelmat eivät noudata tätä kaavaa ja on hyvin tyypillistä, että yhtäsuuruusmerkki ja tuntematon sijaitsevat muualla kuin ongelman lopussa. Kun aiemmin opittu tieto ei vastaa uutta tietoa, tekee oppilas todennäköisemmin virheitä. (McNeil & Alibali, 2004.)

Myös aritmetiikan ja algebran toisistaan erottamisen on nähty vaikeuttavan siirtymistä aritmetiikasta algebraan. Algebrallisen ajattelun kehittyminen vaatii aikaa, joten algebraa tulisi sisällyttää matematiikan opetukseen mahdollisimman varhain. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että yläkoulun algebran oppisisältöjä tulisi sellaisenaan siirtää alempien luokkien opetukseen. Alakoulun aikana kaavojen käyttö ja erilaisten sääntöjen opettelu ei ole tarkoituksenmukaista, vaan tulisi keskittyä algebrallisen ajattelun kehittämiseen. (Carpenter & Levi, 2000.) Alakouluun sopivien algebrallista ajattelua vaativien oppisisältöjen kehittäminen voi kuitenkin olla haastavaa. Yhtälötyypin lisäksi merkitystä on tehtävänannolla ja opettajan roolilla: vaikka yhtälön ratkaisu onnistuisi laskutoimituksia hyödyntäen, voi ulkoa tuleva ohjeistus kannustaa oppilasta algebralliseen ajatteluun.

3.4 Yhtäsuuruus opetussuunnitelmassa

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2015) painotetaan matemaattisen tiedon rakentumisen luonnetta. Kunkin oppilaan taitotason ja niiden välisten erojen selvittäminen on alakoulun matematiikan opetuksen ensimmäisiä tehtäviä. Oppilaan kehitystä tarkkaillaan ja hänelle tulee tarjota systemaattisesti tukea, jotta oppilas sisäistää tarvittavat perusteet ennen uusien sisältöjen oppimista. (Opetushallitus, 2015.) Eri aineiden oppikirjasarjat pyritään rakentamaan mahdollisimman toimiviksi kokonaisuuksiksi, mutta oppikirjojen vuosittainen kannesta kanteen läpikäyminen ei takaa jokaiselle oppilaalle yhtäläisiä kehittymismahdollisuuksia.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa yhtäsuuruutta ei mainita erikseen, mutta se sisältyy useisiin matematiikan oppisisältöihin. Yleisesti oppiaineen tehtäväksi nimetään pohjan luominen erilaisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle. Opetuksen tulee kehittää oppilaan taitoja havaita yhtäläisyyksiä, eroavaisuuksia, säännönmukaisuuksia, syy- ja seuraussuhteita sekä erilaisia yhteyksiä. Kaikki nämä tavoitteet esiintyvät opetussuunnitelman perusteissa läpi alakoulun. (Opetushallitus, 2015.) Yhtäsuuruus liittyy hyvin läheisesti näihin opetussuunnitelmassa nimettyihin sisältöihin. Lisäksi yhtäsuuruus on merkittävä matemaattinen käsite ja rakenne, mutta tämä ei välttämättä välity lukijalle. Myös opetuksen systemaattisuutta korostetaan matemaattisen tiedon luonteen vuoksi (Opetushallitus, 2015). Matematiikassa useat tietorakenteet liittyvät toisiinsa ja yhden matemaattisen käsitteen tai rakenteen hallitseminen vaatii useamman muun ymmärtämistä. Oppilaat kohtaavat yhtäsuuruuden käsitteen jo hyvin aikaisessa vaiheessa, mutta opetussuunnitelman perusteet eivät nosta esille käsitteeseen perusteellista tutustumista, jolloin käsitteen hallitseminen voi jäädä puutteelliseksi.

Opetussuunnitelman perusteissa oppiainekohtaiset osiot on alakoulun osalta eroteltu vuosiluokkiin 1–2 sekä 3–6. Alkuopetuksessa painotetaan selvästi matematiikan aritmeettista puolta: oppilaan tulisi harjaannuttaa päässälaskutaitoa, ymmärtää jako- ja kertolaskun välinen yhteys, opetella kertotauluja sekä tutustua erilaisten ominaisuuksien, kuten vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden, hyödyntämiseen eri laskutoimituksissa. (Opetushallitus, 2015.) Aritmetiikan opiskelussa oppilaat kohtaavat pääasiassa tyypillisessä muodossa olevia yhtälöitä, joissa vasemmalla puolella yhtäsuuruusmerkkiä on operaatio ja kysytylle ratkaisulle on tyhjä tila oikealla (McNeil et al., 2006). Toistuva samanlaisten rakenteiden kohtaaminen voi ohjata oppilasta tulkitsemaan yhtäsuuruusmerkkiä operationaalisesti. Toisaalta aritmetiikkaan perehtyminen on edellytys algebraan siirtymiselle, mutta väärien käsitysten syntymisen mahdollisuus tulisi tiedostaa.

Oppilaan laskutaidon kehittäminen nähdään myös myöhemmillä vuosiluokilla merkittävänä matematiikan opetuksen tehtävänä. Oppiaineen pääsisältöihin lukeutuvat edelleen kertolaskujen opettelu, erilaisten ominaisuuksien ja yhteyksien hyödyntäminen laskutoimituksissa sekä laskutoimitusten harjoittelu haastavammilla luvuilla. Uutena aihekokonaisuutena esitellään algebra, jonka sisällöistä alakoulun puolelle kuuluvat lukujonoihin liittyvien säännönmukaisuuksien tutkiminen, tuntemattoman käsite sekä yhtälöihin tutustuminen ja niiden ratkaiseminen päättelemällä tai kokeilemalla. (Opetushallitus, 2015.) Yhtäsuuruutta ei yhäkään mainita erikseen, mutta se on erittäin oleellisessa asemassa edellä mainituissa aihekokonaisuuksissa.

Toiminnallisuus, yhteisöllisyys ja konkretia esiintyvät matematiikan opetuksen työtavoissa sekä tavoitteissa läpi koko alakoulun (Opetushallitus, 2015). Yhteisöllinen oppiminen ja matemaattisten periaatteiden konkretisointi nähdään toimivina menetelminä relationaalisen käsityksen muodostumisen tukemisessa (Falkner et al., 1999; Sáenz-Ludlow ja Walgamuth, 1998). Esimerkiksi yhtälövaa'an avulla on mahdollista havainnollistaa yhtälön molempien puolten yhtäsuuruutta. Näiden työtapojen mainitseminen opetussuunnitelman perusteissa ei kuitenkaan välttämättä tarkoita, että niitä käytetään yhtäsuuruuden käsitteen opettamisessa ja havainnollistamisessa. On myös syytä huomioida, että pelkkä välineen tai työskentelytavan hyödyntäminen ei takaa tavoiteltuja oppimistuloksia. Eri välineitä ja työtapoja tulee osata käyttää tarkoituksenmukaisella tavalla, jotta ne todella toimivat ja tukevat oppilasta tarkoitetulla tavalla.

Yhtäsuuruus sisältyy lähes kaikkiin matematiikan opetuksessa käsiteltäviin aihepiireihin, mutta siihen pitäisi tutkimustulosten valossa kiinnittää enemmän huomiota. Yhtäsuuruuden käsitteen virheellinen ymmärtäminen voi hankaloittaa aritmetiikasta algebraan siirtymistä huomattavasti (Falkner et al., 1999; Knuth et al., 2008; Mann, 2004). Mikäli käsite tuotaisiin riittävän hyvin esille opetussuunnitelman perusteissa, sen oleellisuus välittyisi tehokkaammin kasvatusalalla työskenteleville. Opetussuunnitelman tavoitteet ja sisällöt eivät suoraan tue yhtäsuuruuden oikeanlaista syvällistä ymmärtämistä. Esimerkiksi yhtälönratkaisussa oikeaan ratkaisuun voidaan alakoulutasolla päätyä kokeilemalla tai arvaamalla, eli käyttämättä vaativampien yhtälöiden ratkaisemiseen tarvittavia algebrallisia strategioita. Oikeaan ratkaisuun päätyminen ei välttämättä tarkoita, että oppilas ymmärtää oikein yhtäsuuruuden käsitteen.

4 Toteutus

Valitsimme tutkittaviksi kirjasarjoiksi Tuhattaiturin, Kympin ja Yykaakoon (Liite 1). Kustannusosakeyhtiö Otavan Tuhattaituri-kirjasarja ja Sanoma Pro Oy:n Kymppi ovat kustantajiensa pääkirjasarjat, joita kehitetään aktiivisesti. Molemmat näistä kirjasarjoista päivitetään uuteen syksyllä 2016 voimaan tulevaan opetussuunnitelmaan sopiviksi. Lisäksi valitsimme Edukustannuksen vähemmän käytetyn matematiikan kirjasarjan, jossa vuosiluokille 1–3 on kirjasarja Yykaakoo ja vuosiluokille 4–6 kirjasarja Neeviikuu. Edukustannus on uusi oppikirjojen kustantaja, Otavan ja Sanoma Pro Oy:n ollessa huomattavasti vanhempia.

4.1 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tutkimuskysymykset määriteltiin seuraaviksi:

1. Millaisiin kategorioihin oppikirjojen yhtälötehtävät voidaan jakaa?
2. Miten kategorioihin sijoittuneiden tehtävien määrät vaihtelevat oppikirjasarjoissa?
3. Miten kategorioihin sijoittuneiden tehtävien määrät vaihtelevat oppikirjoissa vuosiluokittain?

Ensimmäisen tutkimuskysymys koskee kategorioita, jotka muodostuvat 1.–3. vuosiluokan kolmea eri oppikirjasarjaa tutkittaessa. Kategoriat huomioivat kattavasti kaikki oppikirjan yhtälöt, jotka edellyttävät, että oppilas työstää niitä jollakin tavalla. Tutkimuksen tarkoitus on vertailla kirjasarjoja kategorioiden sekä niiden sisältämien tehtävien prosentuaalisten osuuksien ja lukumäärien perusteella. Lisäksi erilaisten yhtälöitä sisältävien tehtävien osuuksien vaihtelua tarkastellaan valittujen vuosiluokkien aikana. Jokainen vuosiluokka sisältää kaksi oppikirjaa, yhden syksylle ja toisen keväälle, jolloin tutkimuksessa on mukana kuuden oppikirjan muodostama ajallinen jatkumo. Määrien ja osuuksien sekä niissä ilmenevien vaihtelujen tarkastelun lisäksi tutkimus analysoi saatuja tuloksia aiempien tutkimusten valossa. Aiempien eri maissa toteutettujen tutkimusten tulokset antavat vahvaa näyttöä oppilaiden yhtäsuuruusmerkin tulkintaan liittyvistä taipumuksista ja tulkintoihin vaikuttavista tekijöistä.

4.2 Tutkimusmenetelmä

Tämän tutkimuksen oppikirja-analyysi on toteutettu laadullisen sisällönanalyysin vaiheita seuraten, ja tuloksia havainnollistetaan kvantitatiivisia menetelmiä hyödyntäen. Oppikirjat voivat olla aineistona hyvin strukturoimatonta, tutkimuskysymyksistä riippuen, mutta Tuomen ja Sarajärven (2013) mukaan sisällönanalyysi sopii hyvin juuri tällaisen aineiston tutkimiseen. Sisällönanalyysissa tapahtuva systemaattinen epäoleellisen aineiston karsiminen on tutkimuksen kannalta oleellista, sillä tarkka perehtyminen koko aineistoon vaikeuttaisi rajatuissa tutkimuskysymyksissä pysymistä.

Kvalitatiivisessa sisällönanalyysissa on mahdollista hyödyntää kvantitatiivisia menetelmiä aineiston käsittelyssä ja tutkimustulosten esittämisessä (Schreier, 2012). Tässä tutkimuksessa tehtävien luokittelu tapahtuu laadullisen sisällönanalyysin vaiheita seuraten, mutta tutkimuksessa käytetään myös kvantitatiivisia menetelmiä saatujen tulosten esittämiseen ja analysoimiseen. Laadullisella menetelmällä kerätyn ja analysoidun aineiston kvantifiointi on joissain tapauksissa turhaa eikä tuo tutkimukselle lisäarvoa. Tämä liittyy kuitenkin lähinnä aineiston pienuuteen. (Tuomi & Sarajärvi, 2013.) Tässä tutkimuksessa aineisto on niin laaja, että määrien ja frekvenssien selvittäminen sekä niiden esittäminen erilaisten taulukoiden ja diagrammien avulla selkeyttävät tulosten havainnollistamista merkittävästi. Tiedon kvantitatiivinen käsittely antaa perusteita yleistävien johtopäätösten tekemiselle ja voi tarjota uusia näkökulmia kvalitatiiviselle tulkinnalle (Miles & Huberman, 1994). Jo tähän tutkimukseen valitut tutkimuskysymykset edellyttävät kvantifiointia, ja aineiston koon ollessa näin suuri emme näe pelkästään laadullisiin menetelmiin nojaavaa analyysia toimivana.

Tutkimus jaottelee valituissa oppikirjoissa esiintyvät yhtälöitä sisältävät tehtävät eri luokkiin, sekä tarkastelee tehtävien määriä ja frekvenssejä eri kategorioissa. Frekvenssit mahdollistavat vuosiluokkien aikana tapahtuvien muutosten tarkastelun sekä oppikirjojen ja kirjasarjojen välisen vertailun. Näemme määrien raportoimisen myös tärkeänä, sillä kirjasarjojen ja vuosiluokkien välillä on havaittavissa selkeitä eroavaisuuksia, jotka tulevat näin selkeästi esille. Kvantitatiivisen tarkastelun lisäksi tuloksia analysoidaan aiemmin tehdyn tutkimuksen valossa. Aikaisempien tutkimustulosten mukaan (McNeil & Alibali, 2004; 2005b) operationaalisen yhtäsuuruuskäsityksen taustalla on muun muassa liian yksipuolinen yhtälötyyppeihin tutustuminen. Tutkimalla kvantitatiivisin menetelmin, esiintyykö erilaisista yhtälöistä koostuvia tehtäviä tasaisesti vai onko jokin tietty tyyppi selvästi yleisin, saadaan osviittaa siitä, minkälaiseen käsitykseen yhtäsuuruudesta oppikirjojen tehtävät voivat ohjata.

Laadullisen sisällönanalyysin eri menetelmistä tähän tutkimukseen on valittu teoriaohjaava sisällönanalyysi. Teoriaohjaava sisällönanalyysi poikkeaa hieman yleisimmin sovelletuista aineistolähtöisestä ja teorialähtöisestä sisällönanalyysista. Teorialähtöisessä analyysissa tutkittavaa ilmiötä määritellään jonkin jo ennalta tunnetun teorian mukaisesti. Aineistolähtöisessä analyysissa on oleellista, että analyysiyksiköt eivät ole ennalta sovittuja, vaan ne määritellään valitun tutkimusaineiston perusteella. (Tuomi & Sarajärvi, 2013.) Päädyimme kuitenkin sulkemaan nämä tutkimusmenetelmät pois, sillä kumpikaan niistä ei täysin vastannut tutkimuskysymysten asettamiin tarpeisiin.

Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissa on tunnistettu ongelma, voiko tutkija toteuttaa analyysin pelkästään materiaalin ehdoilla antamatta ennakkoluulojen vaikuttaa tehtyihin päätelmiin (Tuomi & Sarajärvi, 2013). Kategoriajaon luominen täysin irrallaan aiemmista aiheeseen liittyvistä tutkimuksista ei olisi ollut tarkoituksenmukaista. Koemme myös, että jo olemassa olevien käsitteiden käyttäminen nimeämisessä on perusteltua tutkittaessa matematiikan kaltaista aihetta, jossa käsitteet ovat hyvin vakiintuneita. Schreierin (2012) mukaan tutkimuksen validiteetin kannalta on yleensä hyvä soveltaa ainakin osittain aineistolähtöistä sisällönanalyysia. Mikäli aineiston analyysissa käyttää kokonaan valmiita luokitteluperusteita, on mahdollista, että saadut tulokset eivät täysin vastaa laadittuihin tutkimuskysymyksiin. (Schreier, 2012.) Puhtaasti teorialähtöinen sisällönanalyysi suljettiin lopulta pois nimenomaan, koska valmiiden kategorioiden toimivuus tutkimuskysymysten selvittämisessä on kyseenalaista.

Teoriaohjaava sisällönanalyysi etenee aineistolähtöisen tavoin aina abstrahointiin eli teoreettisten käsitteiden muodostamiseen asti. Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissa on Milesin ja Hubermanin (1994) mukaan kolme eri vaihetta: redusointi, klusterointi ja abstrahointi. Redusoinnilla, kuten litteroinnillakin, tarkoitetaan materiaalin pelkistämistä siten, että jäljellä on tutkimuksen kannalta oleellista tietoa. Klusteroinnissa aineiston alkuperäisilmaukset ryhmitellään kuvaavien käsitteiden avulla. Abstrahointivaiheessa klusteroinnissa käytetyistä alkuperäisilmauksien kielellisistä muodoista muokataan teoreettisia yleiskäsitteitä ja johtopäätöksiä. (Miles & Huberman, 1994.) Krippendorff (2004) on nimennyt otannan rajaamisen yhdeksi sisällönanalyysin vaiheista. Tutkimuksessa ei kuitenkaan päädytty rajaamaan aineistosta tiettyä otantaa, sillä oppikirjojen sisältöjen vaihtelevuuden vuoksi otanta ei todennäköisesti olisi kuvannut riittävän hyvin koko aineistoa.

Teoriaohjaavassa sisällönanalyysissa olemassa olevat käsitteet ja teoriat otetaan mukaan abstrahointivaiheessa, kun alkuperäisilmaukset korvataan teoreettisilla käsitteillä (Tuomi & Sarajärvi, 2013). Osa tutkimuksessa esiintyvistä kategorioista on poimittu suoraan olemassa olevasta teoriasta tai johdettu matematiikassa tunnetuista käsitteistä, kun taas osa on aineistosta nostettuja riittävän tarkkuuden ja täsmällisyyden saavuttamiseksi. Tässä oppikirja-analyysissa sanallisten ilmaisujen sijaan tutkitaan matemaattisessa muodossa esitettyjä yhtälöitä, jotka ryhmitellään niitä kuvaavien kategorioiden alle. Kategorioiden määritelmiä muokataan klusteroinnin aikana, kunnes ne hioutuvat yksiselitteisiksi.

4.3 Aineistonkeruu

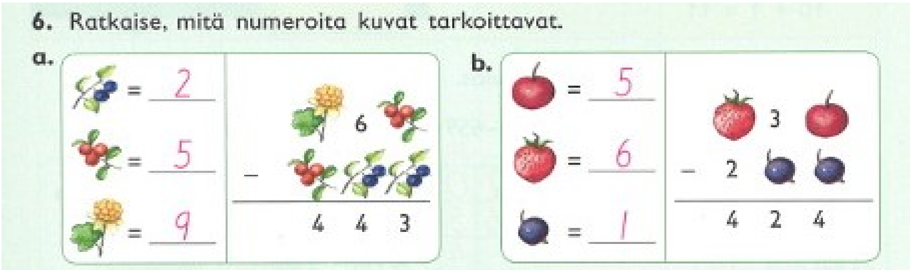
Useat yhtäsuuruutta ja algebraan siirtymistä koskevat tutkimukset painottavat varhaisessa vaiheessa saatujen kokemusten merkitystä. Oppimisen alussa muodostetut käsitteet ovat lujassa, mikä tekee virheellisten käsitteiden korjaamisesta haastavaa (Stephens et al., 2013; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005a). Myös konstruktivistinen oppimiskäsitys tukee ajatusta, jonka mukaan aikaisemmin opitut tietosisällöt vaikuttavat siihen, miten uudet asiat sisäistetään (Dewey, 1938/1988). Aineistoa rajatessa pääpaino asetettiin nimenomaan alkuopetusluokkien oppikirjoihin. Tiedostamme, että lapset saavat valtavasti matematiikkaan liittyviä kokemuksia jo ennen ensimmäistä luokkaa, mutta halusimme pysyä peruskoulun opetussisällöissä. Ensimmäisen, toisen ja kolmannen vuosiluokan matematiikan opettajan oppaat kolmesta kirjasarjasta muodostavat riittävän laajan aineiston, jotta pystymme tutkimuksessamme tuomaan esille vuosiluokkien aikana tapahtuvia muutoksia oppikirjojen sisällöissä.

Tutkimuksen aineistoksi on valittu kirjasarjojen opettajan oppaat, koska ne näyttävät, miten kirjasarja olettaa tehtävät ratkaistavan. Opettajan materiaalista tutkitaan vain kuvattuna olevat oppikirjan sivut. Esimerkiksi erilaiset oppaan ehdottamat taululle kirjattavat esimerkit, päässälaskut tai toiminnalliset tehtävät jäävät tutkimuksen ulkopuolelle. Tutkimuksessa kotitehtäviä, lisätehtäviä tai kertausaukeamia ei erotella. Tuhattaitureissa ja Kympeissä kunkin luvun tehtävät ovat kahdella aukeamalla, sisältäen kotitehtävät ja lisätehtävät. Yykaakoossa jälkimmäinen aukeama on eriytetty niin, että vasemmalla sivulla ovat perustason lisä- ja kotitehtävät ja oikealla sivulla haastavammat versiot. Emme kuitenkaan erotelleet eriytettyjä tehtäviä toisistaan, sillä vaikeustason valitseminen on kussakin luvussa oppilaskohtaista ja erottelun tekeminen olisi vähentänyt tutkimuksen objektiivisuutta. Tutkimuksen tarkoitus on tarkastella oppikirjoja kokonaisuutena sen sijaan, että osioita eroteltaisiin toisistaan niiden tarkoituksen perusteella.

Tämä tutkimus huomioi kaikki oppikirjan tehtävät, joissa oppilaat työstävät yhtälöitä jollakin tapaa, kuten ratkaisevat yhtälöstä tuntemattoman, kirjoittavat yhtälön kuvallisten ohjeiden perusteella tai täydentävät yhtälöön oikean operaatiomerkin siten, että yhtälö on tosi. Tällöin tehtävien sisältämät valmiit esimerkit tai tehtävänannoissa olevat yhtälöt jäävät ulkopuolelle. Esimerkiksi kuvien ja valmiiden yhtälöiden yhdistämistä viivalla ei myöskään huomioida, koska oppilas ei työstä varsinaista yhtälöä. Oppikirjoissa on toistuvasti erilaisia tietolaatikoita, joissa käsitellään kappaleen aihetta. Tietolaatikot voivat sisältää yhtälöitä, mutta oppilas ei työstä niitä, joten ne jäävät tutkimuksen ulkopuolelle. Vihkotehtäviä ei myöskään huomioida, sillä opettajan oppaissa esitellään usein pelkkä ratkaisu. Ilman näkyviä välivaiheita tällaisten tehtävien luokittelu jäisi liian tulkinnanvaraiseksi.

Ulkopuolelle jäävät myös allekkainlaskut ja jakokulmat, jos tehtävässä ei ole yhtälöä yhtäsuuruusmerkin sisältävässä muodossa. Mikäli tehtävässä ohjeistetaan sijoittamaan kahden lausekkeen väliin joko =, > tai <, mutta yhtäsuuruusmerkkiä ei kuitenkaan sijoiteta mihinkään yhtälöön, jää tehtävä valitun aineiston ulkopuolelle. Tutkimus keskittyy nimenomaan yhtäsuuruusmerkkiin, jolloin “suurempi kuin”- ja “pienempi kuin” -merkit eivät sisälly tutkimukseen. “Pienempi tai yhtä suuri kuin”- ja “suurempi tai yhtä suuri kuin” -merkit liittyvät aiheeseen, mutta niitä ei esiinny valituissa oppikirjoissa. ≈-merkki muistuttaa ulkomuodoltaan paljon yhtäsuuruusmerkkiä, mutta sitä käytetään, kun ilmoitetaan luku pyöristettynä haluttuun tarkkuuteen. Koska merkin funktio on hyvin erilainen, sitä ei ole sisällytetty tutkimukseen.

Emme näe tutkimuksen kannalta oleellisena huomioida tehtävien kohtia, joissa kerrotaan tietyn symbolin eli tuntemattoman arvo. Kohdat jäävät tutkimuksen ulkopuolelle, sillä vaikka oppilas niin sanotusti työstää yhtälöitä, emme usko tällaisten yhtälöiden vaikuttavan oppilaiden tulkintaan yhtäsuuruudesta. Emme myöskään löytäneet tutkimuksia, joissa olisi otettu kantaa tällaisten yhtälöiden merkitykseen oppilaan muodostaessa käsitystään yhtäsuuruusmerkistä. Esimerkiksi kuvassa 2 marjoina kuvatut numerot, jotka muodostavat luvun, ilmoitetaan allekkainlaskun yhteydessä. Tehtävässä on yhtäsuuruusmerkki, mutta se ei sisälly aineistoon. Huomioimme kuitenkin tällaisten tehtävien muun osuuden, jos siinä on oppilaan työstettäviä yhtäsuuruusmerkin sisältäviä yhtälöitä.



Kuva 2. Allekkainlasku, jossa osa numeroista korvattu kuvilla. Teoksesta "Tuhattaituri 3a: Opettajan opas", Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P., 2012, s. 41. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Monissa oppikirjoissa yhtälöitä esitetään tavallisesta poikkeavassa muodossa. Tämä on tyypillistä etenkin alkuluokan oppikirjoille, joissa tehtäviä pyritään esittämään vaihtelevin tavoin sekä esimerkiksi tukemaan oppilaan ymmärrystä kuvallisin keinoin. Tällaiset tehtävät edellyttävät tutkimukselta tavanomaisen yhtälökäsitteen venyttämistä sekä tarkkojen rajojen vetämistä yhtälökategorioiden välille. Selkeästi tietyiksi luvuiksi tulkittavat kuvalliset ilmaisutavat käsitellään lukuina. Lukuja kuvataan esimerkiksi kolikoilla tai tietyllä määrällä tikkareita, kuten kuvan 3 tehtävässä. Toisinaan taas yhtälöt esitetään lukuina, mutta muutoin tavallisesta poikkeavassa muodossa. Täysin matemaattisesti tulkittuna muotojen oikeellisuus saattaa olla kyseenalaista, mutta tutkimuksessa tehtäviä pyritään tarkastelemaan hieman joustavammin.

Kuva 3. Luvun ilmaiseminen kuvalla yhtälössä. Teoksesta "Yykaakoo 1A: Opettajan opas", Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M., 2014, s. 59. Helsinki: Edukustannus Oy.

Tutkimuksessa analysoiduista oppikirjoista osa tarjoaa oppilaille hyvin löyhästi rajattuja tehtäviä, joihin ei ole tarkkaa oikeaa ratkaisua. Oppilaita esimerkiksi pyydetään muodostamaan erilaisia laskuja kuvasta tai kirjoittamaan itse jokin yhtälö ja siihen liittyvä tarina. Tällaisissa tehtävissä luokittelu tapahtuu opettajan oppaan esittämän esimerkkiratkaisun perusteella. Mikäli esimerkkiä ei tarjota lainkaan, tehtävä jätetään tutkimuksen ulkopuolelle.

Murtoluvut tulkitaan laskuoperaatioina, eli esimerkiksi murtolukuina ilmoitettu 2⁄4 = 1⁄2 tulkitaan yhtälönä, jossa on operaatio molemmin puolin (2 : 4 = 1 : 2). Valitut kirjasarjat käyttävät erilaisia tapoja esitellä murtoluvun käsite. Tutkimuksessa käytetyn tulkintatavan taustalla on Tuhattaiturin tapa yhdistää murtoluku jakolaskuun. Kuvassa 4 on tietolaatikko luvusta, jossa murtoluvun merkintätapa esitellään ensimmäisen kerran. Kappaleen tehtävät seuraavat myös samaa kaavaa ja niissä havainnollistetaan murtoluvun ja jakolaskun yhteyttä. McNeil et al. (2006) ovat tutkimuksessaan tulkinneet murtoluvut yksittäisinä lukuina, mutta kyseinen menettelytapa olisi edellyttänyt erilaisten alakategorioiden luomista.

Kuva 4. Murtoluvun merkintätavan esittely oppikirjassa. Teoksesta “Tuhattaituri 3a: Opettajan opas”, Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P., 2012, s. 162. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Tehtävien jako kategorioihin tapahtui siten, että molemmat tekivät erillisen luokittelun jokaisesta oppikirjasta. Tämän jälkeen tehtyjä luokitteluja verrattiin toisiinsa. Tämän työvaiheen tarkoituksena oli karsia huolimattomuusvirheitä, mutta etenkin muokata luokittelukategorioita mahdollisimman yksiselitteiseen muotoon. Vertailu nosti esille kaikki tekemiemme luokittelujen eroavaisuudet, joista osa johtui huolimattomuudesta ja osa taas erilaisesta tavasta tulkita kategorioita. Kaikkiin eroavaisuuksiin etsittiin perustelujen kautta yhtenevä mielipide, ja kategorioiden tarkat määritelmät muotoutuivat nimenomaan keskustellessamme. Pyrimme läpinäkyvyyteen ja kirjasimme kategorioille tarkat määritelmät, jotta tutkimus olisi toistettavissa luokittelua tekevästä osapuolesta riippumatta.

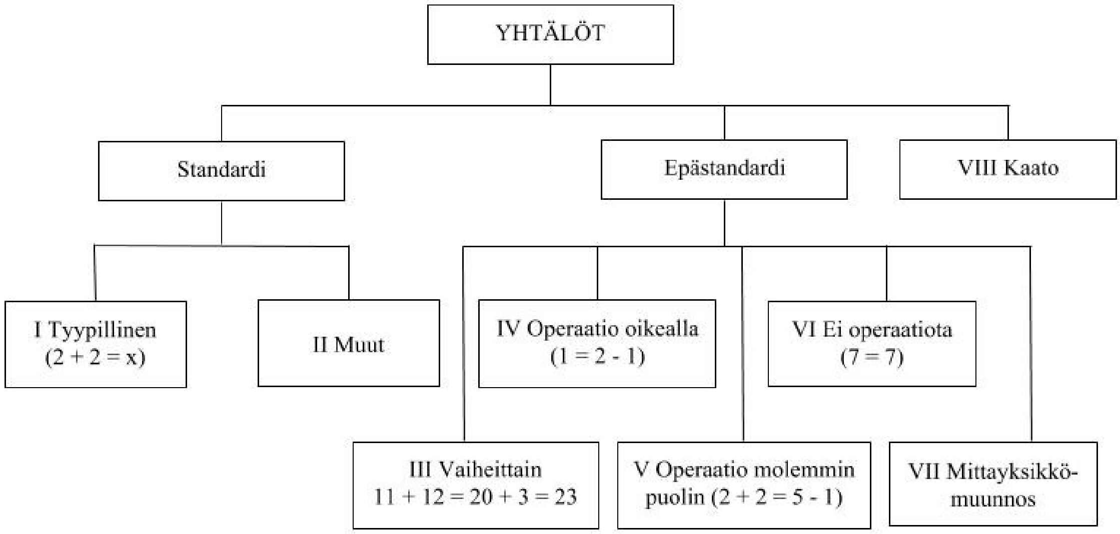
4.3.1 Luokittelukategoriat

McNeil ja muut (2006) jakavat yhtälöitä ja yhtäsuuruutta käsittelevässä oppikirjatutkimuksessaan yhtälöt ensin kahteen kategoriaan. Ensimmäisen kategorian muodostavat yhtälöt, joissa vasemmalta luettuna on ensin operaatio, sitten yhtäsuuruusmerkki ja yksi luku. Tämä tutkimus käyttää samaa jakoa nimeten kyseistä muotoa olevat yhtälöt standardeiksi. McNeilin ja muiden (2006) tekemän jaottelun mukaan ensimmäisessä kategoriassa tuntemattomien määrällä ja sijainnilla ei ole merkitystä, kunhan muoto on sama. Toisen kategorian muodostavat epästandardit yhtälöt. Tähän kategoriaan kuuluvat yhtälöt jaettiin kaikkiaan vielä neljään osaan: (a) yhtälöihin, joissa on operaatio yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin, (b) yhtälöihin, joissa operaatio on yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella, (c) yhtälöihin, joissa ei ole selkeää operaatiota ollenkaan ja (d) epäyhtälöihin. (McNeil et al., 2006.) Emme pitäneet oleellisena huomioida epäyhtälöitä lainkaan, sillä niillä ei ole yhteyttä valittuihin tutkimuskysymyksiin. Myös tapamme käsitellä yhtälöitä, joissa ei ole operaatioita, eroaa McNeilin ja muiden tutkimuksesta. Tämän tulkintatavan taustalla olevat näkemykset esitellään johtopäätösten yhteydessä.

Powell (2012) käyttää myös jakoa standardeihin ja epästandardeihin yhtälöihin. Standardit yhtälöt ja muotoa $4 = 2 + 2$ olevat epästandardit yhtälöt hän jakaa viiteen alakategoriaan käytettyjen laskuoperaatioiden perusteella. Muita alakategorioita ovat yhtälöt, joissa on operaatio molemmilla puolilla sekä yhtälöt, joista operaatiot puuttuvat. (Powell, 2012.) Tutkimuksemme pyrkii yhtälötyyppien jaottelun kautta muodostamaan käsityksen siitä, minkälaiseen käsitykseen yhtäsuuruudesta oppikirjat ohjaavat oppilasta. Käsityksen muodostumisen kannalta käytetyillä laskuoperaatioilla ei ole väliä, joten tutkimus ei käytä niitä yhtälöiden jaottelun perusteena. Powellin (2012) sekä McNeilin ja muiden (2006) tekemällä kategoriajaolla on paljon yhteistä, ja juuri näitä elementtejä hyödynnetään myös tämän tutkimuksen kategorioiden nimeämisessä.

Aineisto luokitellaan kahteen pääkategoriaan, standardeihin ja epästandardeihin yhtälöihin. Standardeihin yhtälöihin kuuluvat kaikki yhtälöt, joissa yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella on operaation sisältävä lauseke ja oikealla pelkästään yksi luku (esimerkiksi $1 + 2 = 3$). Tuntemattomien määrällä tai sijainnilla ei ole merkitystä. Standardit yhtälöt jakautuvat tutkimuksen kahteen ensimmäiseen kategoriaan. Aineistoluokittelu on kuvattuna kuviossa 1.

Kuvio 1. Tutkimuksen luokittelukategoriat.



I-kategoria muodostuu tyypillisiä yhtälöitä sisältävistä tehtävistä. Kategoriaan kuuluvat ne tehtävät, joiden sisältämissä yhtälöissä kysytty luku on yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella (esimerkiksi 2 + 3 = x).

II-kategoriaan sijoitetaan muut tehtävät, joissa esiintyy yhtälöitä standardissa muodossa. Niissä esimerkiksi kysytään yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella lausekkeessa olevaa muuttujaa, sijoitetaan oikea operaatiomerkki lausekkeeseen tai muodostetaan yhtälö sanallisen ohjeistuksen avulla. II-kategoriaan kuuluvat tehtävät ovat yleisesti tarkasteltuna ohjeistukseltaan vapaamuotoisempia kuin I-kategorian tehtävät, mutta noudattavat yhä samaa muotoa.

Epästandardeihin yhtälöihin kuuluvat aiemmista poikkeavassa muodossa olevat yhtälöt. Tällaiset tehtävät jaetaan viiteen kategoriaan. Poikkeuksena ovat erilliseen VIII-kategoriaan kuuluvat tehtävät.

III-kategoriassa ovat tehtävät, joissa kehotetaan merkitsemään yhtälön välivaihe esille. Tehtävän vaiheiden tulee riippua toisistaan, jolloin esimerkiksi 3 + 2 = 16 – 11 = 5 ei kuulu tähän kategoriaan, sillä välivaihe ei ole johdettu ensimmäisestä vaiheesta. Välivaiheen tehtävä voi olla esimerkiksi laskustrategian avaaminen tai laskujärjestyksen havainnollistaminen.

IV-kategoriaan sisältyvät tehtävät, joiden yhtälöissä operaation sisältävä lauseke on oikealla puolella ja vasemmalla puolella on yksi luku, esimerkiksi 4 = 2 + 2.

V-kategoriaan kuuluvat tehtävät sisältävät yhtälöitä, joissa yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla on operaation sisältävä lauseke, esimerkiksi $2 + 2 = 5 - 1$. Tähän kategoriaan sijoittuvat myös yhtälöt, jotka sisältävät murtolukuja yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin.

VI-kategorian muodostavat tehtävät, jotka sisältävät identiteettiyhtälöitä ilman operaatioita. Identiteettiyhtälöt ovat yhtälöitä, jotka ovat tosia millä tahansa muuttujan arvolla, esimerkiksi $x + y = x + y$ (Matematiikan käsikirja, 1993, s. 146). VI-kategoria sisältää pelkästään muotoa $x = x$ olevat yhtälöt. Halusimme erottaa tällaiset identiteettiyhtälöt muista yhtälöistä, joissa ei ole operaatiota kummallakaan puolella yhtäsuuruusmerkkiä. Identiteettiyhtälöissä, jotka eivät sisällä operaatioita, molemmat puolet ovat myös visuaalisesti samat.

VII-kategoriaan kuuluvat kaikki mittayksikkömuunnokset, kuten 7dl = 70cl. Mittayksikkömuunnokset eroavat VI-kategorian yhtälöistä siten, että muunnoksissa oppilaan täytyy muuttaa annettu määrä toiseen yksikköön ja käytetty operaatio on ikään kuin piilossa, kun taas muotoa $7 = 7$ olevissa yhtälöissä oppilas ei tee yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin oleville luvuille mitään. Lisäksi mittayksikkömuunnokset voivat olla pidemmän yhtälön yhteydessä, eivätkä omana erillisenä yhtälönään.

VIII-kategoriaan kuuluvat visuaalisesti poikkeavassa muodossa olevat tehtävät, jotka eivät sovellu aiempiin seitsemään kategoriaan, mutta kuuluvat kuitenkin tutkimukseen. Kaatokategorian muodostaminen osoittautui oleelliseksi, sillä yksittäisille poikkeaville tehtäville ei ollut tarpeellista luoda omia kategorioita.

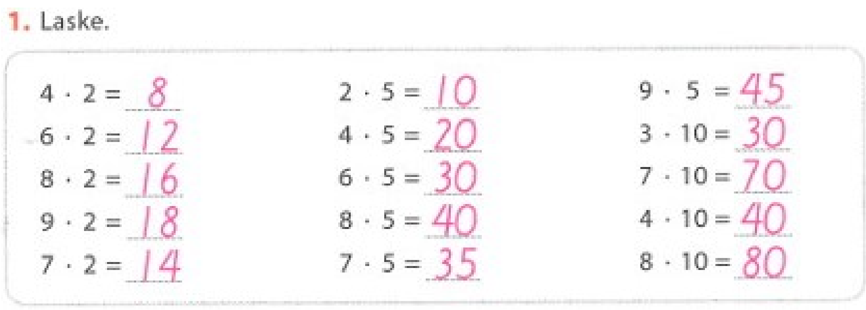
5 Tulokset

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen tulokset määrällisesti. Ensimmäisenä käydään läpi tehtävätason esimerkkejä. Niiden tarkoituksena on selkeyttää tehtävien luokitteluperusteita ja esitellä hankalammin tulkittavissa olevia tehtäviä. Tässä yhteydessä käydään läpi myös kahdeksas kategoria, johon kuuluvat tehtävät, jotka eivät sovellu aiempiin kategorioihin, mutta sisältyvät silti tutkimukseen. Sen jälkeen siirrytään tarkastelemaan tehtävien määriä (n = 3470). Ensimmäisenä ovat tutkimukseen sisältyvien tehtävien kokonaismäärät, toisena niiden jakautuminen kategorioihin ja kolmantena kategorioihin kuuluvien tehtävien päällekkäisyydet eli useampaan kategoriaan kuuluvat tehtävät ja kategorioiden yhdistelmät. Taulukoissa oppikirjasarjojen nimet on lyhennetty seuraavasti: Tuhattaituri on ”TT”, Kymppi on ”Kymp” ja Yykaakoo ”YKK”. Syksyn oppikirjoissa luokka-asteen perään on merkitty ”a” ja kevään oppikirjoissa ”b”.

5.1 Kategorioihin sisältyviä tehtäviä

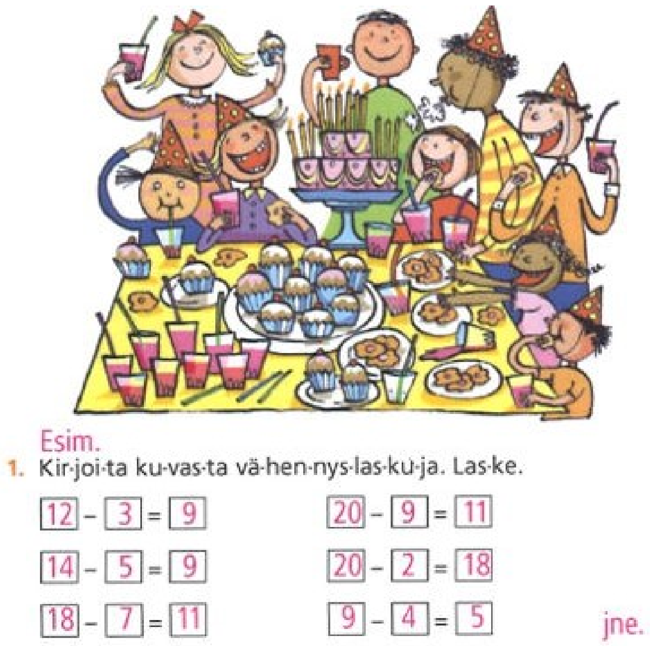
Tässä kappaleessa avataan oppikirjoista poimittujen tehtävien avulla tehtävien luokitteluperusteita. Valituissa oppikirjoissa käytetään niin monin eri tavoin muotoiltuja yhtälöitä, että niiden sanallinen kuvailu ei ole tarpeeksi selkeää.

I-kategoriaan kuuluvat tehtävät erottuvat aineistosta selkeästi, eikä niiden luokittelu herättänyt lainkaan tulkintakysymyksiä. Kuvassa 5 on esimerkki tehtävästä, jossa standardeja, ensimmäiseen kategoriaan kuuluvia tehtäviä on käytetty kertolaskujen harjoitteluun. Tehtävässä oppilaan ratkaistavaksi jätetyt luvut on merkitty punaisella värillä. Kaikkien kirjasarjojen opettajan oppaat käyttävät johdonmukaisesti samaa merkintätapaa.



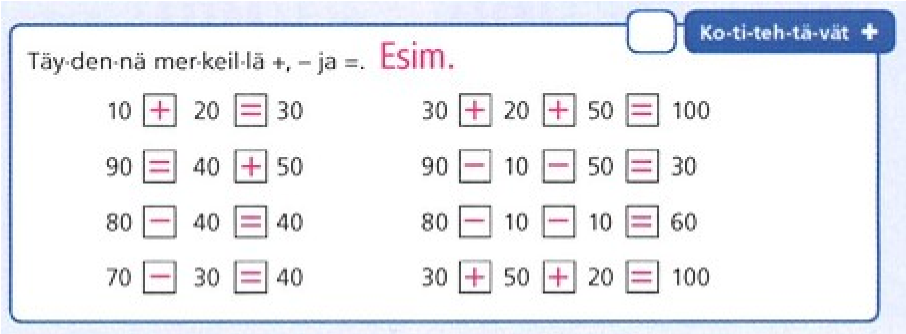
Kuva 5. Standardeja yhtälöitä laskuoperaatioiden harjoitteluun. Teoksesta “Open Kymppi 2 kevät”, Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T., 2013, s. 184. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

II-kategoriaan kuuluvista tehtävistä useimmissa oppilaan täytyy joko lisätä yhtälöön puuttuva luku tai operaatio, tai muodostaa itse koko yhtälö annettujen vihjeiden perusteella. Tehtävissä on kuitenkin yleensä vain yksi oikea ratkaisu. Yykaakoon oppikirjoissa käytetään säännöllisesti avoimempia tehtäviä, joissa oppilaat saavat joko kirjoittaa erilaisia yhtälöitä kuvasta tai keksiä itse tarinan, johon perustuen kirjoittavat yhtälön. Osissa tehtävistä yhtälön muotoa on rajattu: esimerkiksi kuvan 6 tehtävässä oppilas sijoittaa valitsemansa luvut valmiiksi rajattuihin yhtälöihin. Myös Kympeissä ja Tuhattaitureissa esiintyi tällaisia tehtäviä, mutta huomattavasti vähemmän.



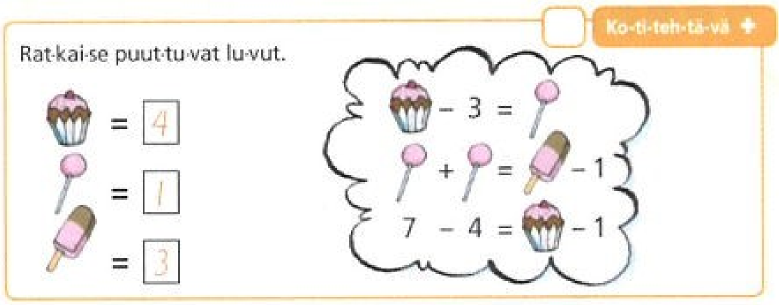
Kuva 6. Vähennyslaskujen kirjoittaminen kuvasta. Teoksesta "Ykaakoo 1B: Opettajan opas", Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L. & Väistö, M., 2014, s. 58. Helsinki: Edukustannus.

Kuvan 7 tehtävässä taas oppilaan tulee sijoittaa oikeat merkit (+, – ja =) muodostaakseen luvuista yhtälön. Jälkimmäisessä tehtävässä oppilaan olisi mahdollista muodostaa halutessaan ainoastaan standardeja yhtälöitä, mutta opettajan oppaan ehdottamista ratkaisuista yksi on epästandardissa, IV-kategoriaan kuuluvassa muodossa (x = y + z). Avointen tehtävien kohdalla tutkimuksessa huomioidaan ainoastaan opettajan oppaan ilmoittamat vastausvaihtoehdot. Oppilaan on mahdollista päätyä tehtävässä erilaisiin ratkaisuihin, jolloin tehtävä voisi sijoittua eri kategorioihin, mutta tätä ei tutkimuksessa huomioida. Opettajan oppaassa huomioidaan kuitenkin kuvan 7 tehtävän kohdalla ratkaisuja olevan useampia ja kirjattujen olevan esimerkkiratkaisuja.



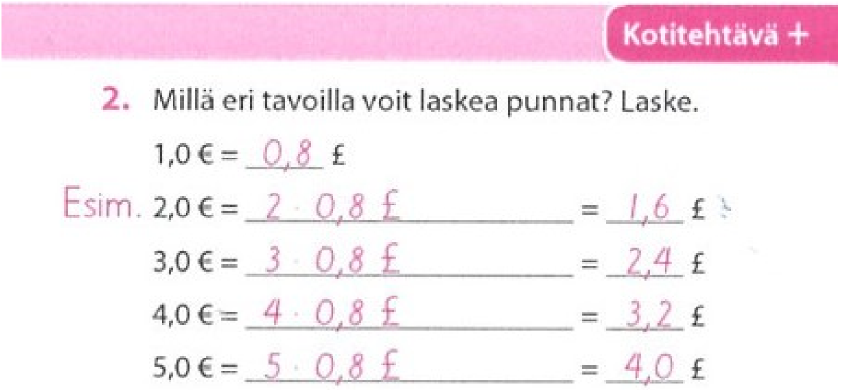
Kuva 7. Yhtälön muodostaminen lisäämällä merkit. Teoksesta "Ykkaakoo 1B: Opettajan opas", Hartikainen, S., Hurme-rinta, E., Häggblom, L. & Väistö, M., 2014, s. 97. Helsinki: Edukustannus.

Tutkimuksessa käytetyissä matematiikan oppikirjoissa tuntemattomaan käsitteeseen tutustutaan kuvallisten ilmaisujen avulla, kuten kuvassa 8. Tehtävänannossa ei myöskään puhuta tuntemattomasta, vaan ohjeistetaan oppilasta yksinkertaisesti ratkaisemaan puuttuvat luvut. Joissain tehtävänannoissa kuville, kuten vaikka hedelmille, on annettu arvot, ja tehtävänannossa kehotetaan kirjoittamaan annettu lauseke luvuilla ja ratkaisemaan se. Näin oppilas tottuu kohtaamaan yhtälöitä, jotka eivät koostu pelkistä luvuista ja erilaisista merkeistä. Tällaiset tehtävät voivat kuulua neljään eri kategoriaan (I, II, IV tai V) riippuen tuntemattoman ja laskuoperaatioiden sijainnista. Usein tehtävät luokitellaan useampaan kuin yhteen kategoriaan, mutta ei koskaan useampaan kuin kolmeen.



Kuva 8. Tuntemattoman ilmaiseminen kuvalla. Teoksesta "Ykkaakoo 1A: Opettajan opas", Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M., 2014, s. 61. Helsinki: Edukustannus Oy.

III-kategorian tehtävät sisältävät yhtälöitä, joissa on yksi tai useampi välivaihe, joista jokainen on riippuvainen edellisestä. Yhtälöissä käytetään opettajan oppaissa välivaiheita pääsääntöisesti neljässä eri tapauksessa. Yksi niistä on laskujärjestyksen havainnollistaminen. Esimerkiksi yhtälössä $6 + 4 \cdot 4 = 6 + 16 = 22$ välivaihe tuo esille käytetyn laskujärjestyksen. Välivaihe voi myös havainnollistaa käytettyä laskustrategiaa, kuten $37 + 13 = 37 + 10 + 3 = 50$. Laskustrategian kirjaaminen auttaa oppilasta tutustumaan erilaisiin strategioihin, joita hän voi hyödyntää myöhemmin haastavammissa tehtävissä. Kategoriaan kuuluva yhtälö voi lausekkeen sijaan alkaa myös yksittäisellä luvulla. Jälkimmäisessä tavassa kyseessä on yleensä hajotelmien teko, jolloin annettua lukua puretaan mahdollisimman pitkälle lausekkeiksi. Tällainen on esimerkiksi 8 = 4 · 2 = 2 · 2 · 2. Neljäs esiintymismuoto ovat mittayksikkömuunnokset.


Kotitehtävä +

2. Millä eri tavoilla voit laskea punnat? Laske.

1,0 € = 0,8 £

Esim. 2,0 € = 2 · 0,8 £ = 1,6 £

3,0 € = 3 · 0,8 £ = 2,4 £

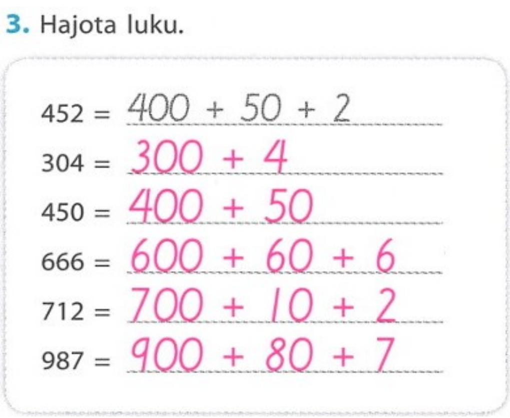
4,0 € = 4 · 0,8 £ = 3,2 £

5,0 € = 5 · 0,8 £ = 4,0 £

Kuva 9. Valuuttamuunnos vaiheittain laskien annetun kurssin avulla. Teoksesta “Ykaakoo 3B: Opettajan opas”, Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L., Sipilä, A-R., Soini, V. & Väistö, M., 2014, s. 59. Helsinki: Edukustannus.

Oppikirjoissa on tehtäviä, jotka sisältävät III-kategorian lisäksi toiseenkin kategoriaan kuuluvia yhtälöitä. Esimerkiksi tehtävät, joissa ensin suoritetaan jokin lasku tietyssä mittayksikössä ja pyydetään lopuksi muuntamaan vastaus toiseen yksikköön samassa yhtälössä (150 cm + 100 cm = 250 cm = 2,5 m), kuuluvat sekä III- että VII-kategoriaan. Myös kuvan 9 kaltaiset tehtävät kuuluvat molempiin kategorioihin.

IV-kategoriaan kuuluvat tehtävät, jotka sisältävät yhtälöitä muodossa x = y + z, ovat usein kuvien 7 ja 8 tehtävien kaltaisia. Yhtälöissä ratkaistaan tuntematon tai sijoitetaan merkkejä tai lukuja. Kategoriaan sijoittuu myös erilaisia hajotelmayhtälöitä, joissa puretaan annettua lukua osiin. Kuvassa 10 on esitettynä tällainen tehtävä, jossa tarkoituksena on hajottaa annettu luku satojen, kymmenten ja ykkösten yhteenlaskuksi.


3. Hajota luku.

452 = 400 + 50 + 2

304 = 300 + 4

450 = 400 + 50

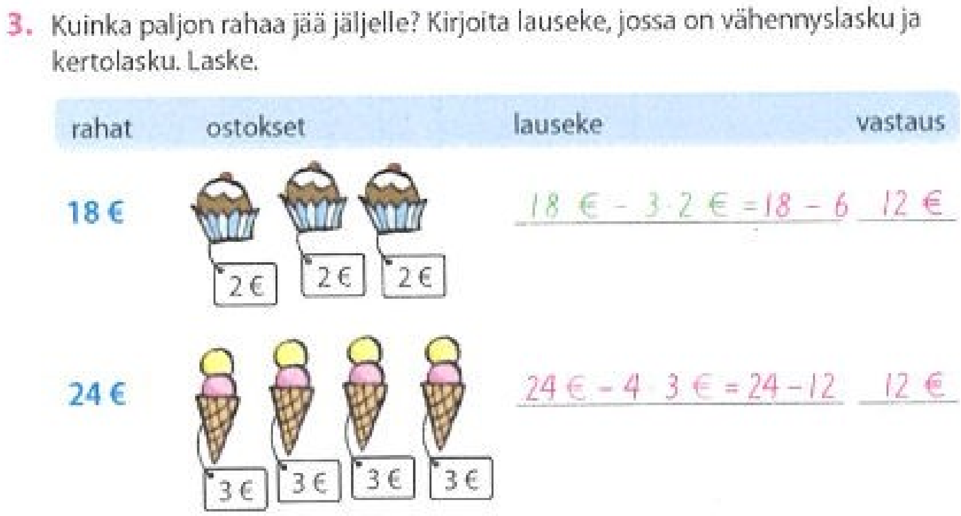
666 = 600 + 60 + 6

712 = 700 + 10 + 2

987 = 900 + 80 + 7

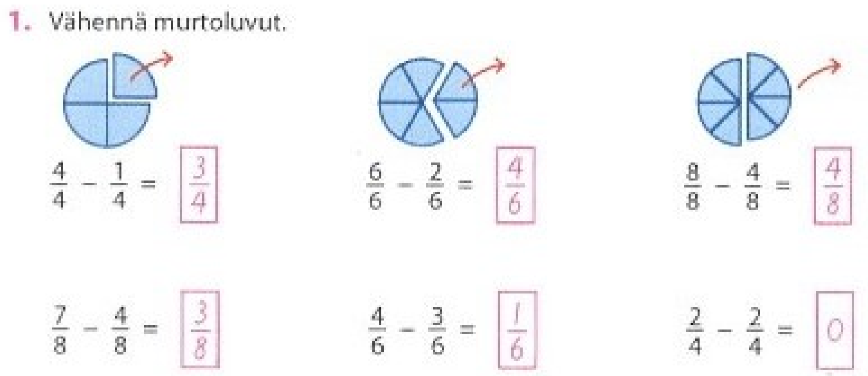
Kuva 10. Luvun hajottaminen satoihin, kymmeniin ja ykkösiin. Teoksesta “Open Kymppi 3 syksy”, Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T., 2014, s. 26. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Kuvassa 11 on esimerkki V-kategoriaan kuuluvasta tehtävästä, joka on hieman tavallisesta poikkeavassa muodossa. Mikäli yhtälö olisi muodossa 18 € – 3 · 2 € = 18 – 6 = 12 €, se olisi vaiheittain laskua ja kuuluisi täten III-kategoriaan. Tehtävän ohjeistuksen mukaan oppilaan tulee kuitenkin kirjata lauseke välivaiheineen sekä vastaukseksi saatu rahasumma erikseen, jolloin muodostuu yhtälö, jossa yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin on operaatio.



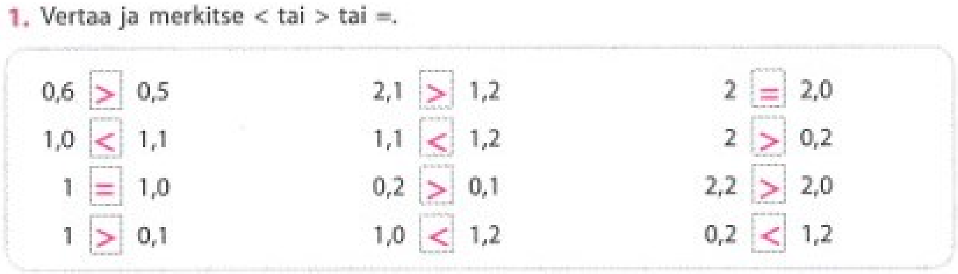
Kuva 11. Molemminpuolisen lausekkeen sisältävä yhtälö. Teoksesta "Yykaakoo 3A: Opettajan opas", Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M., 2014, s. 40. Helsinki: Edukustannus Oy.

Edellä mainittujen kaltaisten tehtävien lisäksi V-kategoriaan kuuluvat murtolukuja yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin sisältävät yhtälöt. Tutkimuksessamme murtoluvut tulkitaan operaatioiksi, joten kuvan 12 kaltaiset tehtävät kuuluvat V-kategoriaan. Kuvassa oleva tehtävä sijoittuu myös I-kategoriaan, sillä yhdessä yhtälössä yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella on vain nolla.



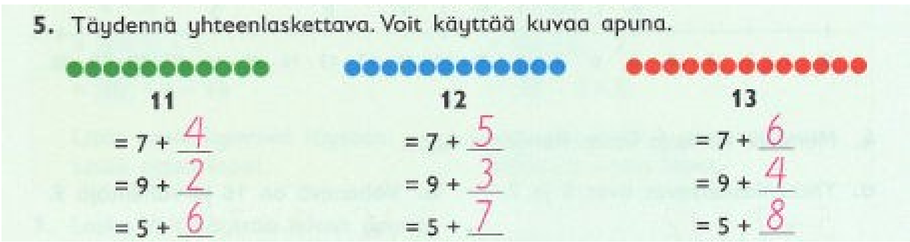
Kuva 12. Murtoluvuilla laskeminen. Teoksesta "Yykaakoo 3A: Opettajan opas", Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M., 2014, s. 46. Helsinki: Edukustannus Oy.

VI-kategoria koostuu tehtävistä, jotka sisältävät ilman operaatioita muodostettuja identiteettiyhtälöitä. Kategoriaan sisältyvät tehtävät ovat enimmäkseen vertailutehtäviä, joissa tehtävänantona on sijoittaa oikea suuruusvertailumerkki (>, < tai =) kahden luvun väliin. Yksi tällä tavalla muodostunut yhtälö sisälsi kaksi yhtäsuuruusmerkkiä, ollen muotoa 2 = 2 = 2, mutta tällaisia tehtäviä ei ole sen enempää. Yykaakoon ensimmäisen luokan kevään oppikirjassa yhdessä tehtävässä esiintyi yhtälö muotoa 12 > 5 = 5. Tässä tehtävässä tutkimukseen sisällytetään ainoastaan yhtäsuuruusmerkin sisältämä osa, jolloin epäyhtälö jätetään huomiotta. Päätimme myös hyväksyä kategoriaan kuvan 13 tehtävän, joka sisälsi yhtälön 1,0 = 1, vaikka puoliskot eivät ole visuaalisesti täsmälleen samat desimaalimerkinnän käytön vuoksi.



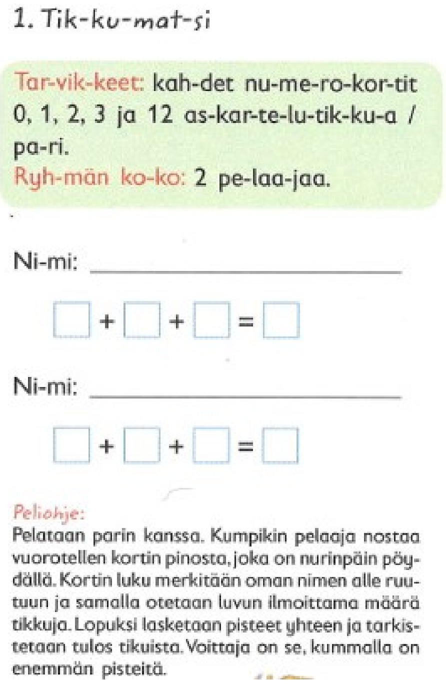
Kuva 13. Desimaalien käyttö luvuissa identiteettiyhtälössä. Teoksesta "Open Kymppi 3 kevät", Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T., 2014, s. 44. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Jotkut tehtävät muotoillaan oppikirjoissa tavoilla, jotka voivat olla matemaattisten sisältöjen kannalta epäsovinnaisia. Osa tällaisista tehtävistä kuuluu VIII-kategoriaan, joka kokoaa tutkimukseen kuuluvat, mutta aiempiin seitsemään kategoriaan kuulumattomat tehtävät. Osa taas sisällytetään aiempiin kategorioihin, mikäli tehtävä sopii kategorian määritelmiin, kuten kuvan 14 tehtävä. Tehtävässä ylös on merkitty yksi luku ja sen alle listataan yhtäsuuruusmerkin kera erilaisia yhteenlaskuja, joilla luku saadaan. Periaatteessa tehtävät voidaan tulkita yhdeksi pitkäksi yhtälöksi usealla rivillä, mutta päätimme tulkita sen erillisiksi yhtälöiksi, kuten 11 = 7 + 4. Tällöin tehtävä sijoitetaan IV-kategoriaan.



Kuva 14. Luvun hajotelmat listattuna luvun alle. Teoksesta "Tuhattaituri 3a: Opettajan opas", Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P., 2012, s. 8. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Tutkimukseen sisältyviä tehtäviä on tavallisten aukeamien lisäksi myös toiminnallisissa osioissa. Kuvassa 15 on toiminnallinen peli, jossa pelataan numerokorteilla ja askartelutikuilla muodostaen yhtälöitä annettuun runkoon.



Kuva 15. Rajattu yhtälö toiminnallisen tehtävän yhteydessä. Teoksesta “Tuhattaituri 1a: Opettajan opas”, Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J., 2012, s. 110. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Tässä tutkimuksessa kategorioihin kuuluvien tehtävien sekä niiden sisältämien yhtälöiden huolellinen tarkastelu on erittäin oleellista kategorioiden määritelmien monimutkaisuuden takia. Oppikirjojen tehtävät ja yhtälöt eroavat muodoltaan toisistaan paikoitellen hyvinkin paljon, jolloin läpinäkyvyyden ja luotettavuuden saavuttaminen edellyttää erilaisten esimerkkien läpikäymistä ja havainnollistamista kuvilla. Ilman tällaista menettelyä tutkimuksen toistettavuus kärsisi merkittävästi.

5.1.1 Kaato-kategoria

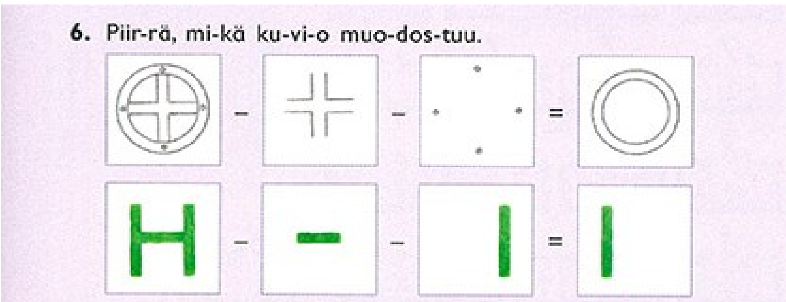
Taulukko 1. Kaatoon luokiteltujen yhtälöiden määrät kirjasarjoittain ja lukuvuosittain. (LIITE 2)

Kirja	1a	1b	2a	2b	3a	3b	Yht.
TT	8	2	1	0	2	3	**16**
Kymp	0	0	5	2	1	0	**8**
YKK	2	0	0	1	0	7	**10**

Taulukossa 1 esitetään VIII-kategoriaan sisältyvien tehtävien määrät, joissa ei ole suuria eroja kirjasarjoittain. Kategoriaan kuuluneita tehtäviä oli yhdessätoista kirjassa kahdeksastatoista. Suurimmat määrät ovat Tuhattaiturin ensimmäisen vuosiluokan syksyllä, Yykaakoon kolmannen vuosiluokan keväällä ja Kympin toisen vuosiluokan syksyllä, joten määrissä ei ole säännöllisyyttä luokka-asteittain. Tuhattaiturissa tehtäviä on toisen vuosiluokan kevättä lukuun ottamatta jokaisessa kirjassa ja yhteensä määrällisesti eniten.

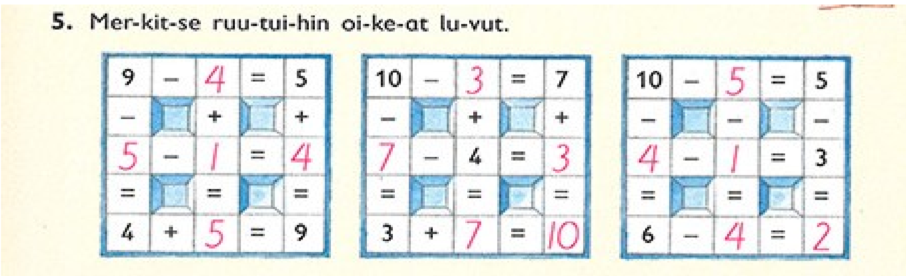
Kaato-kategoriaan kuuluvien tehtävien määrä on pieni, eli harva tutkimukseen soveltuva tehtävä jää kategoriajaon ulkopuolelle. Tämä puolestaan kertoo kategoriajaon toimivuudesta. Mikäli huomattava määrä tehtävistä ei sijoittuisi muodostettuihin kategorioihin, luokitteluperusteet eivät olisi toimivia ja niitä olisi syytä muokata.

Tuhattaituri-kirjasarjassa ensimmäisen vuosiluokan syksyn oppikirjan kahdeksan tehtävää, jotka sijoittuvat VIII-kategoriaan, edustavat kahta eri tehtävätyyppiä. Viisi niistä on kuvan 16 kaltaisia tehtäviä, joissa yhtälö ratkaistaan piirtämällä. Yhtälössä on lukujen sijaan kuvan osia, joita joko yhteenlaskun tavoin lisätään toisiinsa tai vähennyslaskun tavoin vähennetään ensimmäisenä olevasta kuvasta. Tehtävät ovat hyvin soveltavia, eikä niissä käytettyjä kuvia voida suoraan rinnastaa lukuihin, mikä ratkaisee tehtävien sijoittumisen VIII-kategoriaan. Myös ensimmäisen ja kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjoissa on kaksi tällaista VIII-kategoriaan kuuluvaa tehtävää.



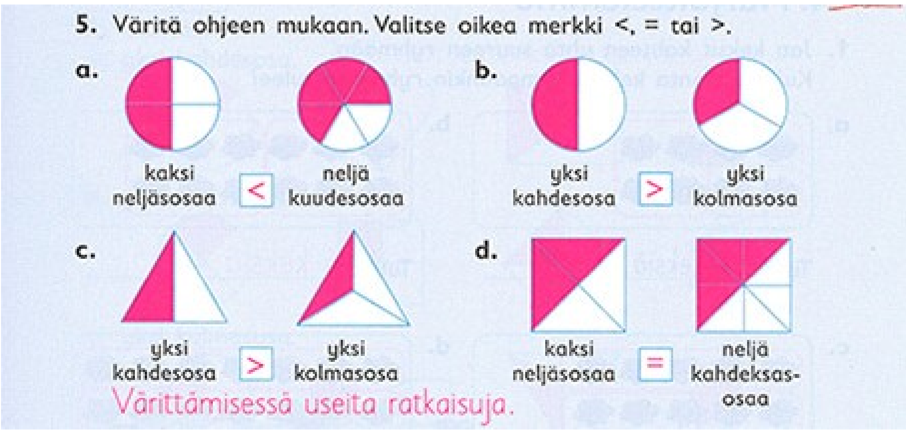
Kuva 16. Yhtälöissä käytetään lukujen sijaan kuvia. Teoksesta “Tuhattaituri 1a: Opettajan opas”, Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J., 2012, s. 121. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Loput kolme tehtävää ovat yhtälöistä muodostettuja sokkeloita, kuten kuvassa 17, joissa ratkaistava luku kuuluu kahteen kohtisuoraan toisiinsa nähden sijoitettuun yhtälöön. Ristikot testaavat 1.-luokkalaisen ongelmanratkaisukykyä, sillä luvut ovat riippuvaisia useammista tekijöistä kuin tavallisesti. Riippuvuuden lisäksi yhtälöt poikkeavat muodoltaan tavallisista yhtälöistä, minkä takia ne sijoittuvat VIII-kategoriaan.



Kuva 17. Kuusi yhtälöä kirjattuna ristikkomaiseen muotoon. Teoksesta "Tuhattaituri 1a: Opettajan opas", Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J., 2012, s. 141. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Tuhattaiturin toisen vuoden syksyn oppikirjassa on yksi VIII-kategoriaan kuuluva tehtävä, joka on näytetty kuvassa 18. Tehtävässä suuruusvertailun kohteena olevat murtoluvut on kirjoitettu auki sanallisesti. Kunkin murtoluvun ilmaisema määrä tulee myös värittää annetusta kuviosta. Tässä tutkimuksessa tehtävä on tulkittu siten, että suuruusvertailun perusteena käytetään ennemminkin visuaalista esitystapaa kuin varsinaisia lukuja. Toisen vuoden kevään oppikirjassa VIII-kategorian tehtäviä ei ole ollenkaan.

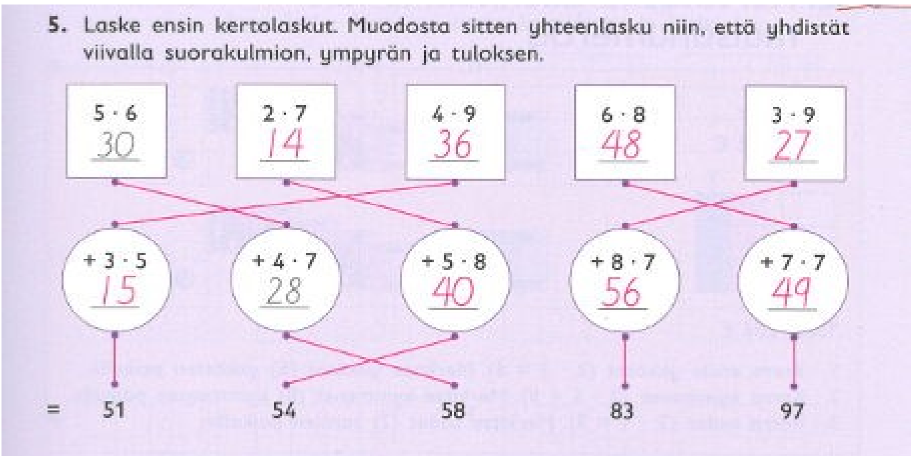


Kuva 18. Yhtälöiden luvut auki kirjoitettuina. Teoksesta "Tuhattaituri 2a: Opettajan opas", Asikainen, K., Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J., 2011, s. 177. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kolmannen vuosiluokan syksyn oppikirjassa kaksi VIII-kategoriaan kuuluvaa tehtävää ovat kuvassa 19 olevia ristikoita, joissa ratkaistaan kertolaskun kerrottavia ja kertojia. Kussakin laskussa on neljä kertolaskua, jotka on sijoitettu ristikon muotoon, jolloin jokainen ratkaistava luku riippuu taas muista luvuista ja laskutoimituksista. Annetut yhtälöt ovat riippuvaisia toisistaan, jolloin muodon lisäksi myös tehtävän ratkaisu poikkeaa tavallisesta yhtälönratkaisusta. Tällaisia tehtäviä on myös yksi kevään oppikirjassa.

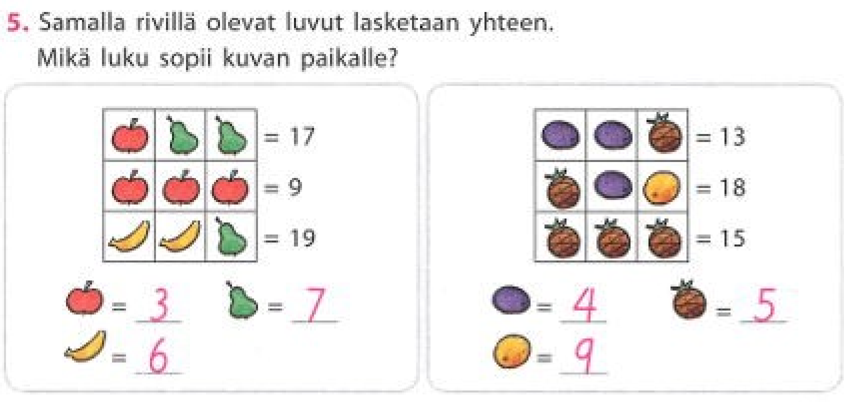
Kuva 19. Neljä yhtälöä kirjattuna ristikkomaiseen muotoon. Teoksesta “Tuhattaituri 3a: Opettajan opas”, Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P., 2012, s. 85. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kolmannessa syksyn oppikirjan tehtävässä tulee laskea ensin annettujen kertolaskujen tulo neliöiden ja ympyröiden sisällä (kuva 20). Tämän jälkeen tulee yhdistää ylärivillä oleva neliö ja keskirivillä oleva ympyrä viivalla niin, että ympyrästä voi vetää viivan sopivaan yhteenlaskun tuloksen, jotka lukevat alimmalla rivillä. Tehtävässä ainoa yhtäsuuruusmerkki on alarivin alussa ilmaisemassa ilmeisesti sitä, että alarivillä on laskujen lopulliset vastaukset. Yhtälö ei ole selkeässä muodossa ja yhtäsuuruusmerkin käyttö poikkeaa tavallisesta, jolloin tehtävä sijoittuu VIII-kategoriaan.



Kuva 20. Eriarvoisten lausekkeiden yhdistäminen oikean summan saamiseksi. Teoksesta “Tuhattaituri 3a: Opettajan opas”, Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P., 2012, s. 129. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kymppi-kirjasarjassa ensimmäisen vuosiluokan oppikirjoissa VIII-kategoriaan kuuluvia tehtäviä ei ole ollenkaan. Toisen ja kolmannen vuosiluokan oppikirjoissa kaikki kahdeksanteen kategoriaan kuuluvat tehtävät ovat kuvan 21 ruudukoita, jonka kuvien eli muuttujien arvot pitää päätellä. Operaatiomerkkejä ruudukoissa ei ole, vaan tehtävänanto määrittää, että kuvien ilmaisemien lukujen summan täytyy olla rivillä ilmoitettu luku. Juuri operaatiomerkkien puuttuminen ratkaisee tehtävien sijoittumisen VIII-kategoriaan.

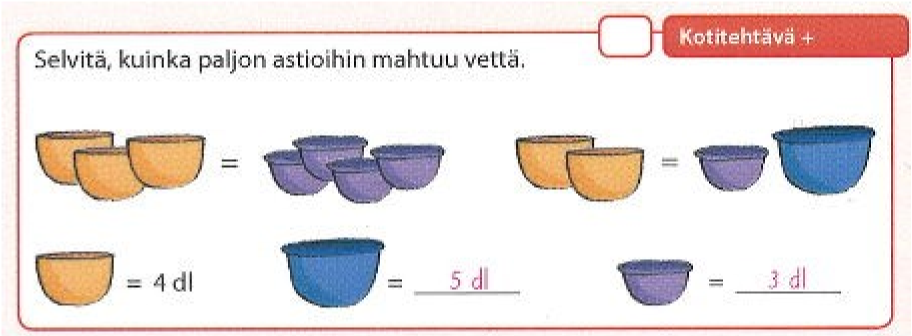


Kuva 21. Yhtälöt ilman operaatiomerkkejä. Teoksesta “Open Kymppi 2 syksy”, Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T., 2013, s. 50. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Ykaakoo-kirjasarjassa ensimmäisen vuosiluokan syksyn oppikirjassa toisessa VIII-kategoriaan kuuluvassa tehtävässä on tarkoituksena sijoittaa lukuja niin, että lasku on oikein. Kuvassa 22 olevassa tehtävässä annettu laskun runko sisältää ensin yksi kerrallaan yhteenlaskuoperaation ja vähennyslaskuoperaation, joihin kumpaankin tulee sijoittaa kaksi lukua. Operaatioiden välissä ja niiden jälkeen on yhtäsuuruusmerkki, joista jälkimmäisen jälkeen kerrotaan valmiiksi yksi luku. Yhtälön vaiheet eivät liity toisiinsa, eikä kyse ole siten III-kategorian mukaisesta vaiheittain laskemisesta. Kirjan toinen VIII-kategoriaan kuuluva tehtävä on yhdenmukainen Tuhattaiturin ensimmäisen vuoden syksyn oppikirjassa olleiden ristikoiden kanssa (kuva 17). Kevään oppikirjassa VIII-kategoriaan kuuluvia tehtäviä ei ole.

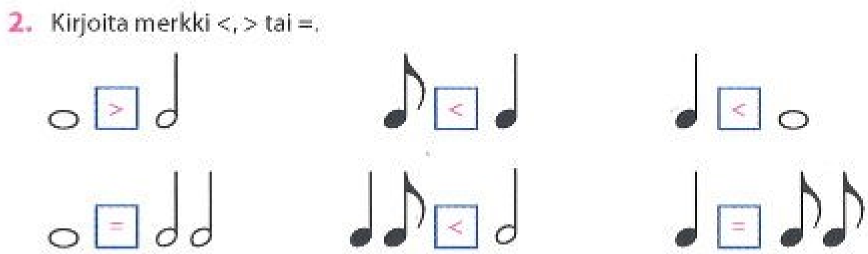
Kuva 22. Lukujen sijoittaminen, jotta kaksi yhtäsuuruusmerkkiä sisältävä yhtälö on tosi. Teoksesta “Yykaakoo 1A: Opettajan opas”, Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M., 2014, s. 49. Helsinki: Edukustannus Oy.

Yykaakoon toisen vuosiluokan syksyn oppikirjassa VIII-kategoriaan kuuluvia tehtäviä ei ole. Kevään oppikirjassa tehtäviä on yksi, joka on näytetty kuvassa 23. Siinä tulee kertolaskuja hyödyntämällä ratkaista yhtälöissä käytettyjen astioiden tilavuus. Yhtälöissä itsessään ei ole lukuja ollenkaan, eikä lukuja ilmaista myöskään astioiden lukumäärillä. Astioilla kuvattujen tuntemattomien arvot ilmaistaan desilitroina, mutta tuntemattomien arvon ilmaisevat yhtälöt jäävät tutkimuksen ulkopuolelle.



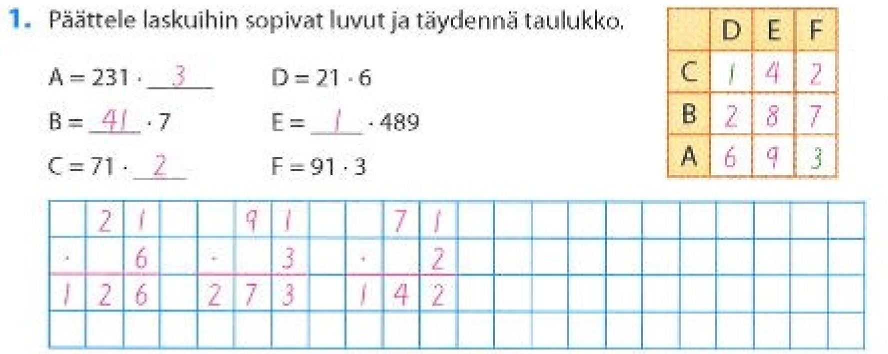
Kuva 23. Muuttujia sisältävän lausekkeen ilmaisu astioina. Teoksesta “Ykaakoo 2B: Opettajan opas”, Latopelto, O., Slunga, M. & Väistö, M., 2014, s. 35. Helsinki: Edukustannus.

Kolmannen vuosiluokan syksyn oppikirjoissa VIII-kategoriaan kuuluvia tehtäviä ei myöskään ole yhtään. Kevään oppikirjassa tällaisia tehtäviä on seitsemän. Niistä kolmessa hyödynnetään nuotteja lukujen sijasta (kuva 24). Nuotit eivät ole suoraan rinnastettavissa lukuihin, mikä sulkee pois muihin kategorioihin sijoittumisen mahdollisuuden.



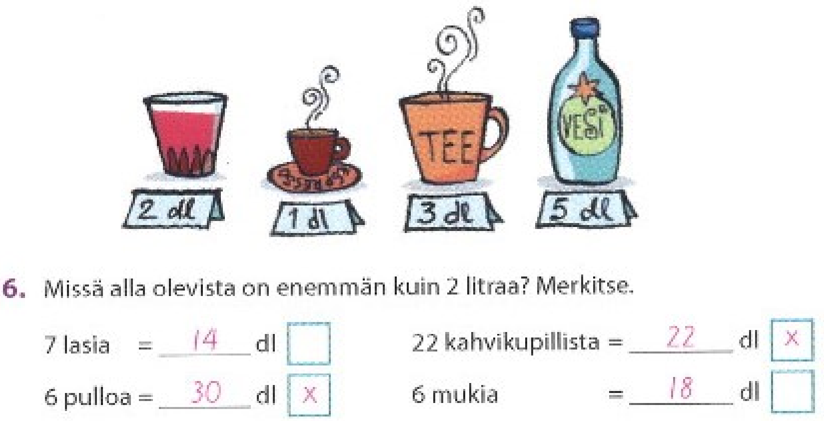
Kuva 24. Nuotit ilmaisemassa lukuja. Teoksesta “Ykaakoo 3B: Opettajan opas”, Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Hägg-blom, L., Sipilä, A.-R., Soini, V. & Väistö, M., 2014, s. 39. Helsinki: Edukustannus.

Kahdessa VIII-kategorian tehtävistä ratkaistaan kirjaimen arvoa päättelemällä yhtälöstä puuttuva luku, kuten kuvan 25 tehtävässä. Yhtälössä olevan kertolaskun saa ratkaista allekkain laskien. Ratkaistu luku kirjataan ristikkoon lukujen ollessa riippuvaisia toisistaan. Eri kirjaimien arvot riippuvat toisistaan ja ne ratkaistaan osittain toistensa avulla, mikä on syynä tehtävän VIII-kategoriaan sisältymiseen.



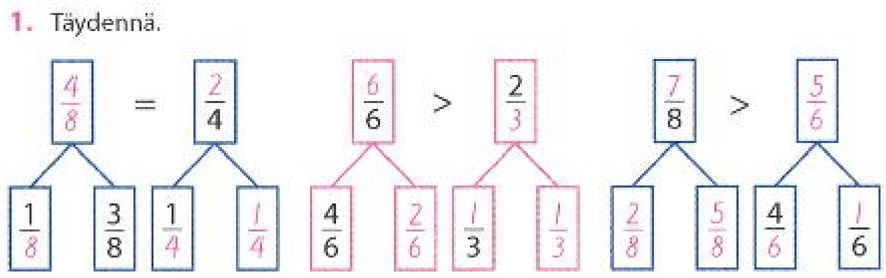
Kuva 25. Muuttujat muodostavat koordinaatistossa lukuja. Teoksesta “Yykaakoo 3B: Opettajan opas”, Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L., Sipilä, A-R., Soini, V. & Väistö, M., 2014, s. 73. Helsinki: Edukustannus.

Yhdessä oppikirjassa olevassa tehtävässä ratkotaan annetun lasimäärän yhteenlaskettua tilavuutta, kun yhden lasin tilavuus on kerrottu (kuva 26). Kyseessä on kertolasku, jota ei ole merkitty näkyville. Tehtävän voisi tulkita myös mittayksikkömuunnokseksi, mutta päätimme sijoittaa sen VIII-kategoriaan, koska annetut mittayksiköt (lasi, pullo, kahvikuppi ja muki) eivät ole tunnistettuja yksiköitä.



Kuva 26. Lasien tilavuuksien muuntaminen annettujen arvojen perusteella desilitroiksi. Teoksesta “Yykaakoo 3B: Opettajan opas”, Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L., Sipilä, A-R., Soini, V. & Väistö, M., 2014, s. 30. Helsinki: Edukustannus.

Kuvan 27 tehtävässä ratkotaan murtolukuyhtälöitä, jotka ilmaistaan osittain kaavioina. Kysytyt luvut ovat niin osoittajia, nimittäjiä kuin koko murtolukujakin. Suuruusvertailussa mukana olevat murtoluvut on purettu kaaviossa osiksi luvun alapuolelle kaavioon. Yhtälön kaaviomainen esitystapa, jossa yhtälön murtoluvut päätellään kaavion muiden lukujen avulla, on visuaalisesti hyvin poikkeava. Tämä on perusteena tehtävän VIII-kategoriaan sijoittamiselle.



Kuva 27. Murtolukuyhtälö on ilmaistu osittain kaaviona. Teoksesta “Yykaakoo 3B: Opettajan opas”, Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L., Sipilä, A-R., Soini, V. & Väistö, M., 2014, s. 49. Helsinki: Edukustannus.

5.2 Tutkimukseen sisältyvien tehtävien kokonaismäärät

Tutkimuksessa on mukana kaikkiaan 3470 tehtävää, jotka jakautuvat kolmeen kirjasarjaan, joista jokaisesta on mukana ensimmäisen, toisen ja kolmannen vuosiluokan oppikirjat. Tehtävät eivät jakaudu tasan kirjasarjojen ja oppikirjojen kesken, vaan esiin nousee eroja kirjasarjojen välillä.

Taulukko 2. Tuhattaituri-kirjasarjan tutkimukseen sisältyvien tehtävien määrät kirjoittain. (Tuhattaituri 1–3, LIITE 2)

Kirja	**TT 1a**	**TT 1b**	**TT 2a**	**TT 2b**	**TT 3a**	**TT 3b**
Yht.	218	196	205	164	221	138

Tuhattaituri-kirjasarjasta tutkimuksen mukaiseen kategoriajakoon soveltuu yhteensä 1142 tehtävää. Eniten tehtäviä on kolmannen ja ensimmäisen vuosiluokan syksyn oppikirjoissa, noin 220 kappaletta. Vähiten tehtäviä, 138 kappaletta, on kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjassa. Tutkimukseen sisältyviä tehtäviä on reilusti enemmän vuosiluokkien syksyjen oppikirjoissa, joissa jokaisessa on hieman yli kaksisataa tehtävää. Kevään oppikirjoissa sen sijaan tehtäviä on alle kaksisataa, kevät keväältä vähemmän.

Taulukko 3. Kymppi-kirjasarjan tutkimukseen sisältyneiden tehtävien määrät kirjoittain. (Kymppi 1–3, LIITE 2)

Kirja	**Kymp 1a**	**Kymp 1b**	**Kymp 2a**	**Kymp 2b**	**Kymp 3a**	**Kymp 3b**
Yht.	179	237	322	159	290	193

Kymppi-kirjasarjasta tutkimuksen kategorioihin nousee yhteensä 1380 tehtävää. Eniten, yli 300 kappaletta, tehtäviä on toisen vuosiluokan syksyn oppikirjassa, mikä on sata tehtävää enemmän kuin Tuhattaiturin suurin yksittäisen kirjan tehtävämäärä. Vähiten tehtäviä on saman vuosiluokan kevään oppikirjassa. Toisen ja kolmannen vuosiluokan kirjoissa on sama johdonmukaisuus kuin Tuhattaitureissa, kun tutkimukseen soveltuvia tehtäviä on huomattavasti enemmän syksyn oppikirjassa kuin kevään oppikirjassa. Kolmannella vuosiluokalla tehtäviä on 97 kappaletta enemmän syksyllä, toisella vuosiluokalla kaksinkertainen määrä kevään oppikirjaan nähden. Ensimmäisellä vuosiluokalla tutkimukseen soveltuvia tehtäviä on huomattavasti enemmän kevään oppikirjassa.

Taulukko 4. Ykaakoo-kirjasarjan tutkimukseen sisältyvien tehtävien määrät kirjoittain. (Ykaakoo 1–3, LIITE 2)

Kirja	**123 1a**	**123 1b**	**123 2a**	**123 2b**	**123 3a**	**123 3b**
Yht.	102	102	159	115	279	191

Ykaakoo-kirjasarjassa tutkimukseen kuuluvia tehtäviä on yhteensä 948 kappaletta eli ainoana kirjasarjana alle tuhat. Ylivoimaisesti suurin määrä niitä on kolmannen vuosiluokan syksyn oppikirjassa, jossa tehtäviä on 279 kappaletta eli noin 29,5 % koko kirjasarjan tehtävistä. Kirja on ainoa, jossa tehtäviä on yli 200 kappaletta. Vähiten tehtäviä on ensimmäisen vuosiluokan kirjoissa, mutta muuten kirjasarja toistaa aiempien kaavaa, ja toisen ja kolmannen vuosiluokan kirjoissa tehtäviä on enemmän syksyn oppikirjoissa.

Tehtävien määrissä on eroja kirjasarjojen välillä. Kirjasarjakokonaisuutena eniten tutkimukseen soveltuvia tehtäviä on Kympissä, kun taas Ykaakoossa on mukana yli 430 tehtävää vähemmän. Ensimmäisen vuosiluokan syksyn kirjassa, jossa lukuja ja operaatioita aletaan opetella alkuopetuksessa, on huomattava vaihtelu tehtävien määrissä. Tällöin Ykaakoo-kirjasarjan tehtävämäärä on huomattavasti pienempi kuin kahdessa muussa kirjasarjassa, ollen jopa alle puolet Tuhattaiturin määrästä. Toisen vuosiluokan syksyn oppikirjoissa tehtäviä on Kympissä ylivoimaisesti eniten verrattuna kahteen muuhun. Kevään oppikirjassa erot kirjasarjojen välillä tasaantuvat. Kolmannen vuosiluokan kirjoissa Ykaakoon tehtävämäärä nousee kuitenkin huomattavasti aiempiin sarjan kirjoihin verrattuna. Määrä on suunnilleen sama Kympin kanssa, kun taas Tuhattaiturilla tutkimukseen soveltuvia tehtäviä on tällöin merkittävästi vähemmän.

5.3 Tehtävien sijoittuminen kategorioihin

Seuraavissa taulukoissa on eroteltu kirja kerrallaan tehtävien jakautuminen kategorioihin. Oppikirjojen tehtävät sijoittuvat 1–3 kategoriaan. Seuraavat taulukot ilmaisevat kirjasarjoittain, kuinka moni tehtävä kuuluu tiettyyn kategoriaan ja kuinka moni tehtävä kuuluu ainoastaan kyseiseen kategoriaan. Taulukot eivät vielä erottele, minkälaisia kategoriayhdistelmiä tutkimuksessa esiintyy. Taulukoissa on kussakin solussa ilmoitettu ensin, kuinka monta tehtävää kyseiseen kategoriaan kuuluu, ja seuraavaksi suluissa kursivoituna, kuinka monta tehtävää kuuluu ainoastaan tähän kategoriaan.

Taulukko 5. Tuhattaituri-kirjasarjan kategorioihin kuuluvien tehtävien määrät lukukausittain. (Tuhattaituri 1–3, LIITE 2)

Kirja	I	II	III	IV	V	VI	VII
TT 1a	101 *(91)*	105 *(74)*	0	17 *(0)*	17 *(3)*	9 *(9)*	0
TT 1b	134 *(117)*	73 *(48)*	0	8 *(1)*	4 *(1)*	2 *(2)*	0
TT 2a	125 *(114)*	77 *(59)*	7 *(7)*	5 *(1)*	10 *(2)*	2 *(2)*	0
TT 2b	81 *(72)*	66 *(50)*	5 *(3)*	14 *(11)*	8 *(2)*	4 *(4)*	6 *(3)*
TT 3a	88 *(73)*	89 *(67)*	46 *(42)*	17 *(9)*	3 *(1)*	2 *(2)*	0
TT 3b	30 *(22)*	52 *(31)*	21 *(7)*	8 *(5)*	25 *(8)*	0	36 *(29)*
Yht.	559 *(489)*	462 *(329)*	79 *(59)*	69 *(27)*	67 *(17)*	19 *(19)*	42 *(32)*

Tuhattaituri-kirjasarjasta tehtäviä on yhteensä mukana 1142, joista 559 eli liki puolet kuuluu ensimmäiseen (2 + 2 = x) ja 462 toiseen (2 + 2 = 4) kategoriaan. I-kategoria on yleisin kategoria puolessa oppikirjoista, eli ensimmäisen luokan kevään ja toisen vuosiluokan molemmissa oppikirjoissa. Ensimmäisen luokan syksyn ja kolmannen vuosiluokan molemmissa oppikirjoissa II-kategoria on yleisin. Näistä syksyn oppikirjoissa ero on vain muutaman tehtävän kokoinen kahden ensimmäisen kategorian välillä, mutta muuten määrät erottuvat selkeästi toisistaan. Kaiken kaikkiaan Tuhattaiturin 1.–3. vuosiluokkien oppikirjojen I-kategoriaan kuuluvista tehtävistä 87,5 prosenttia kuuluu ainoastaan tähän kategoriaan. Myös II-kategorian tehtävistä valtaosa (71,2 prosenttia) ei sijoitu muihin kategorioihin. Vain I- tai II-kategoriaan kuuluvien tehtävien osuudet pysyvät lukukausittain lähes samoina.

III-kategoria (vaiheittainlasku) ei ole edustettuna ollenkaan ensimmäisen vuosiluokan kirjoissa, ja määrä painottuu kolmannen luokan kirjoihin. Neljäs (4 = 2 + 2) ja viides (2 + 2 = 5 – 1) kategoria ovat lähes yhtä suuret kokonaismäärissään, joskin jakautuvat eri tavoilla. Kategoriassa on myös lukukausien välillä selkeitä eroavaisuuksia sen suhteen, kuinka monta tehtävää kuuluu ainoastaan kyseiseen kategoriaan. Toisen vuosiluokan syksyyn asti suurin osa tehtävistä sijoittuu muihinkin kategorioihin, kun taas toisen luokan keväästä eteenpäin tehtävät kuuluvat pääosin ainoastaan IV-kategoriaan.

V-kategoriaan (2 + 2 = 5 – 1) kuuluvat tehtävät yhdistyvät kaikista useimmiten muihin kategorioihin: ainoastaan kyseiseen kategoriaan sijoittuvia tehtäviä on 25,4 prosenttia kaikista kategorian tehtävistä. VI-kategoria (7 = 7) on edustettuna pieninä määrinä läpi kirjasarjan viimeistä kirjaa lukuun ottamatta. VI-kategoriaan kuuluvista tehtävistä kaikki kuuluvat vain ja ainoastaan kyseiseen kategoriaan, joten muotoa 7 = 7 olevia yhtälöitä sisältävät tehtävät eivät sisällä lainkaan muita tutkimukseen kuuluvia yhtälöitä. VII-kategoriaan kuuluvia tehtäviä eli mittayksikkömuunnoksia sisältäviä tehtäviä on vain toisen ja kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjoissa. Puhtaasti mittayksikkömuunnoksista koostuvia tehtäviä on koko kirjasarjassa kolmannen vuosiluokan kevääseen mennessä kuusi kappaletta.

Taulukko 6. Kymppi-kirjasarjan kategorioihin kuuluvien tehtävien määrät lukukausittain. (Kymppi 1–3, LIITE 2)

Kirja	I	II	III	IV	V	VI	VII
Kymp 1a	100 *(72)*	100 *(68)*	0	4 *(0)*	2 *(1)*	6 *(6)*	0
Kymp 1b	188 *(172)*	63 *(47)*	0	0	2 *(2)*	0	0
Kymp 2a	177 *(150)*	167 *(140)*	0	0	0	0	0
Kymp 2b	84 *(80)*	55 *(50)*	2 *(0)*	1 *(0)*	1 *(1)*	0	21 *(19)*
Kymp 3a	130 *(102)*	122 *(89)*	66 *(61)*	1 *(1)*	3 *(3)*	0	0
Kymp 3b	65 *(58)*	64 *(54)*	43 *(32)*	1 *(1)*	1 *(1)*	2 *(2)*	36 *(27)*
Yht.	744 *(634)*	571 *(448)*	111 *(93)*	7 *(2)*	9 *(8)*	8 *(8)*	57 *(46)*

Kymppi-kirjasarjasta tutkimukseen sisältyy 1380 tehtävää, joista 744 eli yli puolet kuuluu ensimmäiseen kategoriaan ja 571 toiseen. I-kategoria on yleisin kategoria jokaisessa oppikirjassa, joskin ensimmäisen vuosiluokan syksyn oppikirjassa I- ja II-kategoriassa on yhtä monta tehtävää. Kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjassa I- ja II-kategoriaan kuuluvien tehtävien määrien eroavaisuus on vain yksi kappale. Ensimmäisen luokan kevään oppikirjassa ensimmäiseen kategoriaan kuuluu kolme kertaa enemmän tehtäviä kuin toiseen, mutta muuten näiden kategorioiden sisältämien tehtävien lukumäärät pysyvät liki toisiaan.

Kaikkiaan Kymppi-kirjasarjan 1.–3. vuosiluokan oppikirjojen I-kategoriaan kuuluvista tehtävistä 85,2 prosenttia kuuluu vain tähän kategoriaan. II-kategoriaan sijoittuvista tehtävistä 78,5 prosenttia ei kuulu muihin kategorioihin. Tuhattaituriin verrattuna prosentuaaliset osuudet ovat lähellä toisiaan. Kympissä vain I-kategoriaan kuuluvien tehtävien osuus on noin kaksi prosenttiyksikköä pienempi, kun taas vain II-kategoriaan kuuluvien tehtävien osuus on noin seitsemän prosenttiyksikköä suurempi.

III-kategoria ei ole edustettuna ennen toisen vuosiluokan kevättä, ja kategorian pääpaino on kolmannessa vuosiluokassa. Vaiheittain laskua sisältäviä tehtäviä on toisen vuosiluokan keväällä kaksi kappaletta ja ne molemmat kuuluvat myös muihin kategorioihin. Kolmannella vuosiluokalla suurin osa III-kategorian tehtävistä kuuluu ainoastaan kyseiseen kategoriaan. IV-kategoriaan (4 = 2 + 2) kuuluvia tehtäviä on yhteensä seitsemän, joista kaksi kuuluu ainoastaan tähän kategoriaan. V-kategoriaan (5 – 1 = 2 + 2) kuuluvia tehtäviä on yhdeksän, joista ainoastaan yksi kuuluu johonkin muuhunkin kategoriaan.

VI-kategoriaan sijoittuneita tehtäviä on kahdeksan, jotka kaikki Tuhattaiturin tavoin kuuluvat ainoastaan kyseiseen kategoriaan. VII-kategoriaan kuuluu 57 tehtävää, jotka ovat jakautuneet toisen ja kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjoihin. Suurin osa, noin 80 prosenttia, VII-kategorian tehtävistä kuuluu vain tähän kategoriaan.

Taulukko 7. Ykaakoo-kirjasarjan kategorioihin kuuluvien tehtävien määrät lukukausittain. (Ykaakoo 1–3, LIITE 2)

Kirja	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**
YKK 1a	38 *(25)*	60 *(46)*	0	6 *(1)*	7 *(5)*	6 *(6)*	0
YKK 1b	50 *(36)*	61 *(44)*	0	4 *(1)*	3 *(2)*	2 *(2)*	0
YKK 2a	54 *(33)*	101 *(76)*	18 *(17)*	4 *(2)*	4 *(3)*	2 *(2)*	1 *(1)*
YKK 2b	49 *(29)*	64 *(44)*	0	6 *(6)*	3 *(3)*	0	12 *(12)*
YKK 3a	75 *(61)*	150 *(138)*	51 *(47)*	15 *(13)*	4 *(4)*	0	0
YKK 3b	41 *(24)*	85 *(75)*	29 *(17)*	5 *(5)*	26 *(21)*	0	24 *(18)*
Yht.	307 *(208)*	521 *(423)*	98 *(81)*	40 *(28)*	47 *(38)*	10 *(10)*	37 *(31)*

Ykaakoo-kirjasarjasta mukana tutkimuksessa on 948 tehtävää. Näistä 521 eli yli puolet kuuluu II-kategoriaan, joka on Tuhattaiturista ja Kympistä poiketen yleisin kategoria jokaisessa oppikirjassa. I-kategoria, johon kuuluvia tehtäviä on yhteensä 307 kappaletta, on toiseksi yleisin jokaisessa kirjasarjassa. I-kategoriaan kuuluvista tehtävistä 67,8 prosenttia kuuluu ainoastaan tähän kategoriaan. II-kategoriaan sijoittuneista tehtävistä 81,2 prosenttia ei kuulu muihin kategorioihin. Vain I-kategoriaan kuuluvien tehtävien osuus on huomattavasti pienempi kuin Tuhattaiturissa tai Kympissä: Tuhattaituriin verrattuna ero on noin kaksikymmentä prosenttiyksikköä. Vain II-kategoriaan kuuluvien tehtävien osuus on hieman suurempi kuin Kympissä.

Kolmannen vuosiluokan oppikirjoissa vaiheittain laskua sisältävien tehtävien muodostaman III-kategorian tehtävämäärät kasvavat lähelle I-kategorian määriä, II-kategorian ollessa ylivoimaisesti suurin. Ensimmäisen ja toisen vuosiluokan syksyn sekä kolmannen vuosiluokan molemmissa oppikirjoissa II-kategoriassa on noin kaksi kertaa enemmän tehtäviä kuin I-kategoriassa.

III-kategoria sisältää kaikkiaan 98 tehtävää, mikä on enemmän kuin Tuhattaiturissa ja liki yhtä paljon kuin Kympissä, vaikka muissa kirjasarjoissa tutkimukseen kuuluvia tehtäviä on enemmän. III-kategoriaan kuuluvista tehtävistä 82,7 prosenttia kuuluu ainoastaan tähän kategoriaan. Kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjassa noin neljäkymmentä prosenttia III-kategorian tehtävistä kuuluu kuitenkin myös johonkin toiseen kategoriaan. IV- ja V-kategoria ovat Ykaakoossa lähes yhtä suuret, ja tehtäviä löytyy jokaisesta oppikirjasta. Ainoastaan IV-kategoriaan kuuluvissa tehtävissä on havaittavissa samansuuntaisia lukukausikohtaisia muutoksia kuin Tuhattaiturissa. Ensimmäisessä kolmessa oppikirjassa suurin osa tehtävistä sijoittuu muihinkin kategorioihin, kun taas jälkimmäisissä lähes kaikki tehtävät kuuluvat ainoastaan kyseiseen kategoriaan.

Muotoa 7 = 7 sisältävistä tehtävistä muodostuva VI-kategoria on edustettuna pelkästään ensimmäisen vuosiluokan molemmissa ja toisen vuosiluokan syksyn oppikirjoissa. Tuhattaiturin ja Kympin tavoin kaikki VI-kategorian tehtävät kuuluvat ainoastaan tähän kategoriaan. VII-kategoria muodostuu kaikkiaan 37 tehtävästä, jotka painottuvat toisen ja kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjoihin. Näistä tehtävistä 31 kuuluu ainoastaan kyseiseen kategoriaan.

5.4 Tehtävien muodostamat kategoriayhdistelmät

Tässä kappaleessa esitellään taulukoita, jotka kuvaavat kirjasarjojen tutkimukseen kuuluvien tehtävien muodostamia erilaisia kategoriayhdistelmiä. Tehtävien hajautuminen seitsemään kategoriaan kertoo oppikirjojen sisäisestä vaihtelusta, kun taas kategoriayhdistelmien tarkastelu keskittyy tehtävätason ominaisuuksiin. Mikäli tehtävä kuuluu useampaan kuin yhteen kategoriaan, oppilas soveltaa useampia ratkaisustrategioita.

VIII-kategoria, kaato, ei ole mukana yhdessäkään yhdistelmässä. Mitkä tahansa muut kategoriayhdistelmät ovat mahdollisia, mutta mikäli jokin tehtävä luokitellaan kuuluvaksi kaato-kategoriaan, ei se voi kuulua samaan aikaan mihinkään muuhun kategoriaan. Kaikkien kahdeksantoista oppikirjan luokittelussa ei syntynyt myöskään ainuttakaan kategoriayhdistelmää, jossa yksi kategorioista olisi ollut VI-kategoria. Nämä kaksi kategoriaa eivät kuitenkaan ole rinnastettavissa toisiinsa, sillä VI-kategoriaan kuuluva tehtävä voi kuulua myös muihin kategorioihin kaatoa lukuun ottamatta.

Taulukko 8. Tuhattaituri-kirjasarjan useampaan kategoriaan kuuluvat tehtävät lukukausittain. (Tuhattaituri 1–3, LIITE 2)

Kirja	TT 1a	TT 1b	TT 2a	TT 2b	TT 3a	TT 3b	Yht.
I+II	10	17	11	7	11	5	61
I+III	0	0	0	2	0	1	3
I+IV	0	0	0	0	2	0	2
I+V	0	0	0	0	0	1	1
I+VII	0	0	0	0	0	1	1
II+III	0	0	0	0	4	3	7
II+IV	9	5	0	1	3	0	18
II+V	6	1	4	5	1	4	21
II+VII	0	0	0	2	0	5	7
III+V	0	0	0	0	0	9	9
IV+V	2	0	1	0	0	0	3
IV+VII	0	0	0	1	0	0	1
I+II+IV	0	0	0	0	2	0	2
II+III+VII	0	0	0	0	0	1	1
II+IV+V	6	2	3	1	1	3	16
Yht.	33	25	19	19	24	33	152

Taulukossa 8 on esitettynä kaikki Tuhattaituri-kirjasarjan tehtävien muodostamat kategoriayhdistelmät, joita on 15 erilaista. Yhteensä mainitun kaltaisia tehtäviä on 152 kappaletta eli 13,3 prosenttia koko kirjasarjan tehtävistä. Ne jakautuvat suhteellisen tasaisesti kirjojen välille. Toisella vuosiluokalla useita kategorioita yhdistäviä tehtäviä on kuitenkin vähemmän, yhteensä 38 kappaletta, kun taas 1. ja 3. vuosiluokalla niitä on liki 60 kappaletta.

Yleisin kahden kategorian yhdistelmä on ensimmäisen (2 + 2 = x) ja toisen kategorian (2 + 2 = 4) yhdistelmä, jota löytyy kaikista kirjoista yhteensä yli kolmannes kaikista useampaan kategoriaan kuuluvista tehtävistä. Nämä kategoriat yhdistyvät myös kaikkien muiden paitsi VI-kategorian kanssa. Toiseksi yleisin yhdistelmä on II- ja V-kategorioiden (2 + 2 = 5 – 1) yhdistelmä, joka löytyy vähintään kerran jokaisesta oppikirjasta. Neljäntenä on II-, IV- ja V-kategorioiden yhdistelmä, joka on samalla myös yleisin kolmen kategorian muodostama yhdistelmä. Kategorioihin III (vaiheittainlasku) tai VII (mittayksikkömuunnos) kuuluvia tehtäviä esiintyy muihin kategorioihin sisältyvinä toisen vuosiluokan keväästä alkaen.

Erilaisia kolmen kategorian yhdistelmiä Tuhattaiturissa on kolme. Jokaisessa näistä on standardi kategoria mukana. Yleisin on edellä mainittu II-, IV- ja V-kategorioiden muodostama yhdistelmä. I-, II- ja IV-kategoriat yhdistäviä tehtäviä on kaksi kolmannen vuosiluokan syksyn oppikirjassa ja II-, III- ja VII-kategorioiden yhdistelmää yksi kolmannen vuosiluokan kevään kirjassa. Kolmen kategorian yhdistelmiä on yhteensä 19 kappaletta.

Taulukko 9. Kymppi-kirjasarjan useampaan kategoriaan kuuluvat tehtävät lukukausittain. (Kymppi 1–3, LIITE 2)

Kirja	Kymp 1a	Kymp 1b	Kymp 2a	Kymp 2b	Kymp 3a	Kymp 3b	Yht.
I+II	28	16	27	4	28	5	108
I+III	0	0	0	0	0	1	1
II+III	0	0	0	0	5	3	8
II+IV	3	0	0	1	0	0	4
II+VII	0	0	0	0	0	1	1
III+VII	0	0	0	2	0	7	9
I+II+VII	0	0	0	0	0	1	1
II+VI+V	1	0	0	0	0	0	1
Yht.	32	16	27	7	33	18	133

Kymppi-kirjasarjassa erilaisia kategoriayhdistelmiä esiintyy kahdeksan, tehtäviä ollessa 133 eli 9,6 prosenttia kaikista kirjasarjan tutkimukseen sisältyvistä tehtävistä. Yhdistelmistä kuusi on kahden kategorian ja kaksi kolmen kategorian sekoituksia. Ainoa jokaisessa kirjassa esiintyvä on I- ja II-kategorioiden yhdistelmä. Yhdistelmä on viidessä ensimmäisessä oppikirjassa kaikista yleisin. II-kategoria on mukana lähes kaikissa yhdistelmissä. I- ja III-kategorioiden yhdistelmää löytyy yksi kappale kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjasta, ja III- ja VII-kategorioiden yhdistelmää esiintyy toisen ja kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjoissa yhteensä yhdeksän kappaletta.

Kolmeen kategoriaan sisältyviä tehtäviä esiintyy yhteensä kaksi, yksi I-, III- ja VII-kategorioiden yhdistelmä kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjassa ja yksi II-, IV- ja V-kategorioiden yhdistelmä ensimmäisen luokan syksyn oppikirjassa. Eniten erilaisia yhdistelmiä esiintyy kolmannen luokan kevään kirjassa, jossa edustettuna on kuusi erilaista yhdistelmää. Eniten useampaan kategoriaan kuuluvia tehtäviä on saman vuosiluokan syksyn oppikirjassa, jossa I- ja II-kategorioiden ja II- ja III-kategorioiden yhdistelmiin kuuluvia tehtäviä on yhteensä 33 kappaletta. Ensimmäisen vuosiluokan kevään ja toisen vuosiluokan syksyn oppikirjoissa edustettuna on pelkästään I- ja II-kategorioiden yhdistelmät.

Taulukko 10. Ykaakoo-kirjasarjan useampaan kategoriaan kuuluvat tehtävät lukukausittain. (Ykaakoo 1–3, LIITE 2)

Kirja	YKK 1a	YKK 1b	YKK 2a	YKK 2b	YKK 3a	YKK 3b	Yht.
I+II	11	14	21	20	10	5	81
I+III	0	0	0	0	2	6	8
I+IV	2	0	0	0	2	0	4
I+V	0	0	0	0	0	4	4
II+III	2	0	1	0	2	1	6
II+VI	0	2	2	0	0	0	4
II+V	1	0	1	0	0	1	3
II+VII	0	0	0	0	0	2	2
III+VII	0	0	0	0	0	3	3
IV+V	1	0	0	0	0	0	1
I+II+III	0	0	0	0	0	1	1
I+III+VII	0	0	0	0	0	1	1
II+IV+V	0	1	0	0	0	0	1
Yht.	17	17	25	20	16	24	119

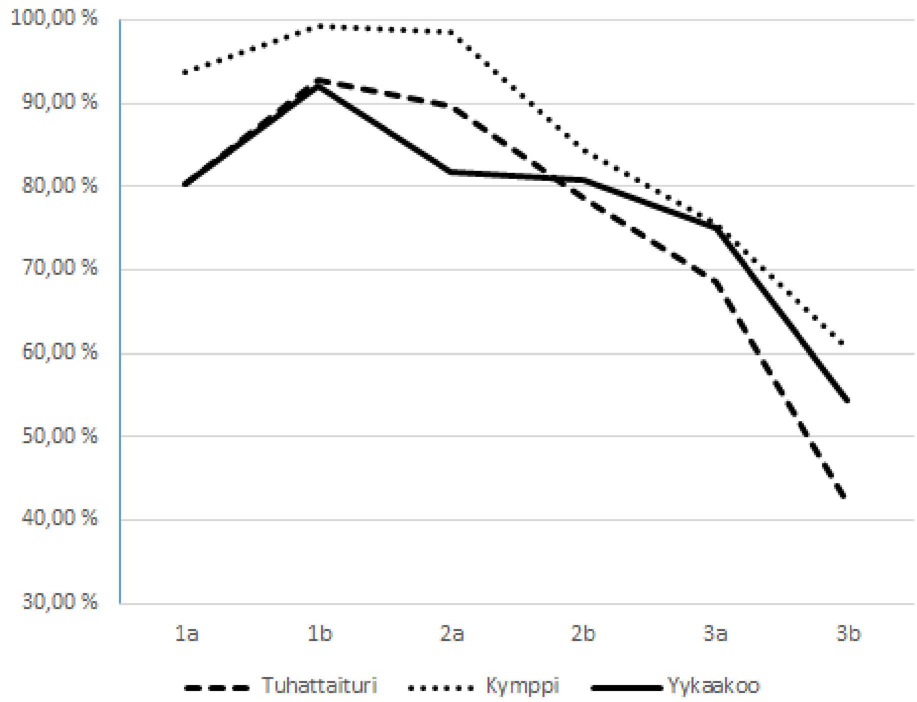
Ykaakoo-kirjasarjassa tehtävät muodostavat kaikkiaan kolmetoista erilaista yhdistelmää, joista kymmenen koostuu kahdesta kategoriasta ja kolme kolmesta eri kategoriasta. Useampaan kategorian sisältyviä tehtäviä on yhteensä 119, joka on noin 12,6 prosenttia kaikista kirjasarjan tehtävistä. Viidessä oppikirjassa I- ja II-kategorioiden muodostama yhdistelmä on selkeästi yleisin määrän vaihdellessa 10 ja 21 välillä per kirja. Tyypillisimmin tällaisissa tehtävissä oppilaalla on vihjeenä kuva, josta tulee muodostaa yhtälö. Oppikirja antaa valmiin, standardissa muodossa olevan malliratkaisun (esimerkiksi 5 – 3 = x), minkä jälkeen oppilaan tulee itse muodostaa yhtälöitä annettujen kuvallisten vihjeiden avulla. Kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjassa I- ja III-kategoriaan kuuluvia tehtäviä on hieman enemmän, mutta eroavaisuus on niin pieni, ettei voida puhua merkittävästä erosta.

Kategoriayhdistelmiä on ensimmäisen vuosiluokan oppikirjoissa ja toisen vuosiluokan syksyn oppikirjassa kolmesta viiteen per kirja. Toisen vuosiluokan kevään oppikirjassa on vain yksi yhdistelmä, I- ja II-kategorian muodostama, mutta useampaan kategoriaan sisältyvien tehtävien määrä on yhä samankaltainen muiden kirjojen kanssa. Kolmannen vuosiluokan syksyn oppikirjassa yhdistelmiä on neljä erilaista, joista jokainen yhdistää standardin ja epästandardin kategorian. Kolmessa yhdistelmässä on mukana I-kategoria. Kevään oppikirjassa erilaisia yhdistelmiä on yhdeksän, mutta tehtävien määrä ei eroa huomattavasti muista sarjan kirjoista.

5.5 Standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sisältävät tehtävät

Tässä luvussa käsitellään standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien määrien vaihtelua valituissa kirjasarjoissa vuosiluokkien 1–3 aikana. Standardeja yhtälöitä sisältävät tehtävät ovat luokitteluvaiheessa sijoittuneet pelkästään I- tai II-kategoriaan tai molempiin. Epästandardeja yhtälöitä sisältävät tehtävät taas on luokiteltu ainoastaan III-, IV-, V-, VI- tai VII-kategoriaan tai useampaan näistä. Syksyn ja kevään oppikirjat on huomioitu erillisinä kokonaisuuksina. Kirjasarjojen välisiä eroavaisuuksia havainnollistetaan esittämällä kaikista kolmesta kirjasarjasta saadut tulokset samassa kuviossa. Tehtävien määrät on ilmoitettu prosenttiyksikköinä, sillä kappalemäärinä ilmoitetut tulokset eivät anna sopivia lähtökohtia kirjasarjojen vertailemiseen.

Kuvio 2. Kunkin kirjan pelkästään standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien prosentuaalinen osuus tutkimukseen kuuluneista tehtävistä. (LIITE 2)

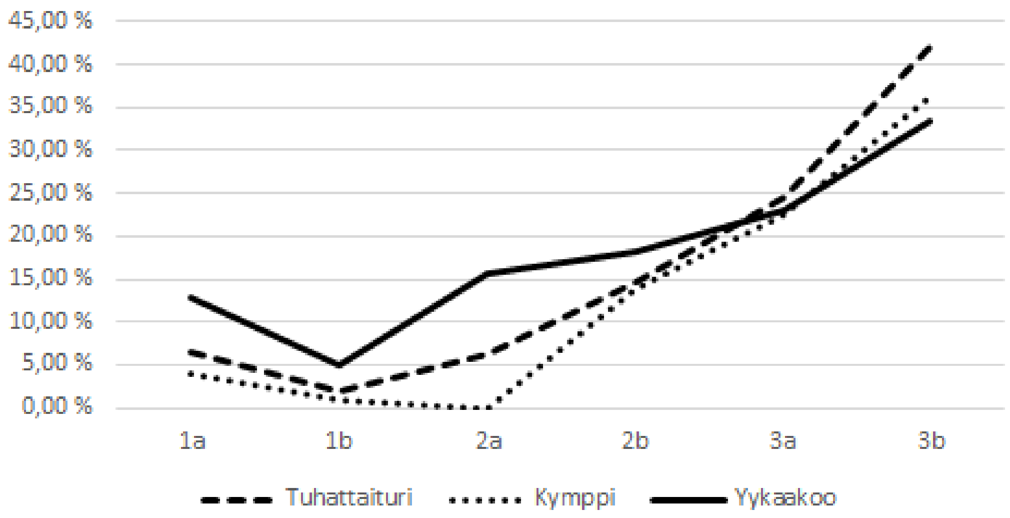


Kuviossa 2 on kuvattuna ainoastaan standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien prosentuaalisten osuuksien muutokset vuosiluokkien 1–3 välillä – standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekaisin sisältävät tehtävät on huomioitu erikseen. Tuhattaituri- ja Yykaakoo-kirjasarjojen vain standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuudet ovat liki samat ensimmäisen vuosiluokan ajan nousten syyslukukauden noin 80 prosentista reilu 90 prosenttiin. Kymppi-kirjasarjan ensimmäisen vuosiluokan syyslukukauden kirjassa standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuus on 93,9 prosenttia. Kevätlukukauden oppikirjassa liki kaikki tutkimuksessa huomioiduista tehtävistä luokitellaan standardeja yhtälöitä sisältävistä tehtävistä muodostuviin kategorioihin.

Toisella vuosiluokalla kaikissa kolmessa kirjasarjassa vain standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuudet laskevat. Tuhattaiturissa tehtävien prosentuaalinen osuus laskee toisella vuosiluokalla ensin syyslukukautena 89,8:aan ja edelleen kevätlukukautena 78,7:ään. Kympissä lasku on alle prosenttiyksikön, jolloin osuus jää yhä lähelle sataa prosenttia. Kirjasarjan toisen luokan kevätlukukauden oppikirjassa standardeja yhtälöitä sisältäviä tehtäviä on 84,3 prosenttia. Yykaakoossa tehtävien osuus putoaa toisen luokan syksyn kirjassa reilu 90 prosentista 81,8 prosenttiin. Laskua tapahtuu myös toisen vuosiluokan syys- ja kevätlukukauden oppikirjojen välillä, mutta lasku on alle prosenttiyksikön luokkaa. Kaikissa kolmessa kirjasarjassa vain standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien määrä laskee myös kolmannen vuosiluokan ajan, ollen kevätlukukauden kirjassa Tuhattaiturissa 42,0 %:ia, Kympissä 60,6 %:ia ja Yykaakoossa 54,5 %:ia.

Kaikissa kolmessa kirjasarjassa vain standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuuksissa on havaittavissa samankaltaisia muutoksia. Ensimmäisen vuosiluokan kevään oppikirjassa tehtäviä on enemmän kuin syyslukukautena, mutta kevään jälkeen osuudet laskevat. Merkittävin tehtävien prosenttiosuuden lasku tapahtuu kolmannen vuosiluokan syys- ja kevätlukukauden oppikirjojen välillä, joskin Kymppi-kirjasarjassa toisen luokan syys- ja kevätlukukauden välillä tapahtuva lasku on liki yhtä huomattava. Tutkimuksen kannalta huomattavia eroavaisuuksia ovat, että Kymppi-kirjasarjan standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien prosentuaalinen osuus on yli 90 prosenttia ensimmäisessä kolmessa oppikirjassa. Kaikissa kuudessa oppikirjassa kyseisten tehtävien osuus on suurin Kympissä. Tuhattaiturissa ja Yykaakoossa standardeja yhtälöitä sisältäviä tehtäviä on yli 90 prosenttia vain ensimmäisen vuosiluokan kevään kirjassa.

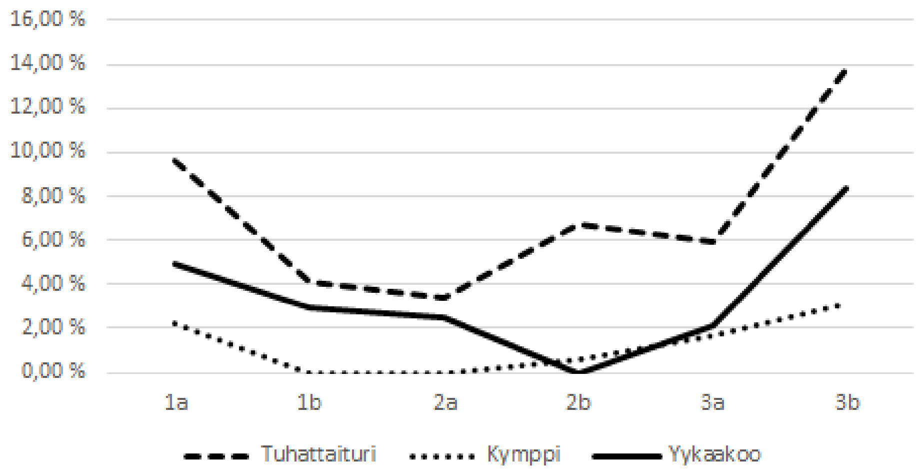
Kuvio 3. Kunkin kirjan pelkästään epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien prosentuaalinen osuus tutkimukseen kuuluneista tehtävistä. (LIITE 2)



Kuviossa 3 taas kuvataan pelkästään epästandardeja yhtälöitä sisältäneiden tehtävien prosentuaalisia osuuksia tutkittujen kirjasarjojen kirjoissa. Tuhattaituri-kirjasarjassa ensimmäisen luokan syksyn oppikirjassa kyseisiä tehtäviä on 6,4 prosenttia kaikista oppikirjan tutkimukseen soveltuvista tehtävistä. Kympissä tehtäviä on 3,9 prosenttia, kun taas Yykaakoossa niitä on huomattavasti kahta muuta kirjasarjaa enemmän eli 12,8 prosenttia. Kaikissa kirjasarjoissa ensimmäisen luokan kevään oppikirjassa vain standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuus on suuri, mikä näkyy epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuuksissa: ne ovat kirjasarjoissa alle viisi prosenttia.

Toisen luokan syksyn oppikirjassa vain epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien määrät nousevat Tuhattaiturissa ja Yykaakoossa, kun taas Kympissä kyseisiä tehtäviä ei ole lainkaan. Yykaakoossa tehtävien osuus nousee yli 15 prosenttiin. Jälkimmäisessä kolmessa oppikirjassa tehtävien osuudet nousevat kaikissa kolmessa kirjasarjassa. Yykaakoossa nousu on loivinta, ja kolmannen luokan kevään oppikirjassa pelkästään epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuus onkin kahta muuta kirjasarjaa pienempi, 33,5 prosenttia. Kympissä tehtävien osuus kolmannen luokan kevään kirjassa on 36,3 prosenttia, kun taas Tuhattaiturissa se on 42,0 prosenttia. Kolmannen luokan kevään oppikirjaa lukuun ottamatta vain epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuus on pienin Kymppi-kirjasarjan oppikirjoissa, joskin erot muihin kirjasarjoihin ovat useammassa kirjassa erittäin pieniä.

Kuvio 4. Kunkin kirjan standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekaisin sisältävien tehtävien prosenttiosuus tutkimukseen kuuluneista tehtävistä. (LIITE 2)



Standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekaisin sisältävien tehtävien osuus kaikista tutkimuksessa huomioiduista tehtävistä on verrattain pieni, jolloin muutosten selkeä havainnollistaminen vaati kuviossa 4 tarkemman asteikon käyttämistä. Standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekoittavat tehtävät antavat kuvaa kirjasarjan vaihtelevuudesta yhtälötyyppeihin liittyen.

Tuhattaiturissa standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekoittavien tehtävien osuus on ensimmäisen luokan syksyn oppikirjassa 9,6 prosenttia. Yykaakoossa kyseisten tehtävien osuus on noin puolet Tuhattaiturin vastaavasta eli 4,9 prosenttia, kun taas Kympissä osuus on 2,2 prosenttia. Ensimmäisen luokan kevään oppikirjassa tehtävien osuus laskee jokaisessa kirjasarjassa. Kympissä standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekoittavia tehtäviä ei ole kirjassa lainkaan, kun taas Tuhattaiturissa niiden osuus on noin neljä prosenttia ja Ykaakoossa hieman vajaat kolme prosenttia.

Toisen luokan syksyn oppikirjassa Tuhattaiturissa ja Yykaakoossa tehtävien osuus laskee alle prosenttiyksiköllä. Kympissä toisen luokan syksyn oppikirjassa tehtäviä ei yhäkään ole, ja kevään kirjassa osuus on 0,6 prosenttia. Tuhattaiturin toisen vuosiluokan kevään oppikirjassa tehtävien osuus nousee yli kuuden prosentin, kun taas Yykaakoossa tehtäviä ei ole lainkaan. Kymppi-kirjasarjan kolmannen luokan oppikirjoissa standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekoittavien tehtävien osuus nousee hieman ollen kevään oppikirjassa 3,1 prosenttia. Yykaakoossa tehtävien osuudet nousevat myös ensin syksyn oppikirjassa reilu kahteen prosenttiin ja kevään kirjassa 8,4 prosenttiin. Tuhattaiturissa tehtävien osuus laskee kolmannen luokan syksyn oppikirjassa hieman, mutta nousee taas kevään kirjassa 13,8 prosenttiin.

Standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekaisin soveltavien tehtävien osuuksien muutos on samansuuntaista ensimmäisissä ja viimeisissä oppikirjoissa. Alkuun tapahtuu laskua toisen luokan syksyn tai kevään oppikirjaan asti, kun taas merkittävin nousu tapahtuu kolmannen vuosiluokan syys- ja kevätlukukauden oppikirjojen välillä. Toisen ja kolmannen vuosiluokan syksyn oppikirjojen välillä tapahtuvissa muutoksissa on eroavaisuuksia. Kirjasarjojen välillä on havaittavissa myös muita eroavaisuuksia standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sisältäviin tehtäviin liittyen. Tuhattaituri-kirjasarjassa tehtävien osuus on alimmillaan 3,4 prosenttia, kun taas Kympissä se on korkeimmillaan 3,1. Yykaakoossa tehtävien osuus laskee toisen vuoden kevätlukukauden oppikirjassa nollaan, mutta pysyy muuten jatkuvasti yli kahden prosentin. Yleisesti ottaen sekä standardeja että epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuudet pysyvät pieninä, lukuun ottamatta kahta Tuhattaiturin ja yhtä Yykaakoon kirjaa.

6 Johtopäätökset

Useat tutkijat ovat oppilaiden yhtälönratkaisustrategioita ja yhtäsuuruuskäsityksiä tarkastellessaan tulleet johtopäätökseen, että algebran esittely olisi syytä tapahtua aikaisessa vaiheessa matematiikan opetusta. Tämä ei kuitenkaan tarkoita esimerkiksi erilaisten algebran kaavojen opettelua alakoulussa, vaan algebrallisen ajattelun kehittämistä ensimmäisistä luokista lähtien. (Carpenter & Levi, 2000; Jacobs et al., 2007.) Algebrallinen ajattelu sisältää muun muassa lukujen ja niiden suhteiden tarkastelun irrallaan annetuista laskutoimituksista sekä erilaisten säännönmukaisuuksien havaitsemisen. Algebrallisen ajattelun kannalta yhtäsuuruuden käsitteen sisäistäminen on erittäin oleellista (Kieran, 1981; Jacobs et al., 2007; McNeil, in press). Operationaalisesti yhtäsuuruusmerkin tulkitseva oppilas keskittyy yhtälöiden laskuoperaatioihin lukujen välisten suhteiden ja erilaisten säännönmukaisuuksien sijaan, jolloin algebra nojaa ulkoa opeteltuihin sääntöihin.

Oppilaiden tekemien yhtäsuuruuteen liittyvien virheellisten yleistysten taustalla ovat usein liian yksipuoliset kokemukset aritmetiikasta (McNeil, in press; McNeil & Alibali, 2004; 2005b). Perinteinen aritmetiikan opetus ei tarjoa oppilaille niin monipuolista käsitystä yhtäsuuruusmerkistä kuin vaadittaisiin, jotta algebraan siirtyminen sujuisi ongelmitta (Freiman & Lee, 2004). Koska matematiikan opetuksessa harvoin todella perehdytään yhtäsuuruusmerkin merkitykseen, täytyy oppilaiden muodostaa oma tulkintansa saatujen kokemusten perusteella (McNeil & Alibali, 2005a). Kohdatessaan runsaasti aritmeettisia ongelmia oppilas muodostaa tiedostamattaan erilaisia kaavoja ja käsityksiä havaintojensa perusteella. Aritmeettisissa ongelmissa yhtälöt ovat usein standardissa muodossa, mikä ei kuitenkaan päde korkeamman tason ongelmiin. (McNeil & Alibali, 2004.)

Valituilla tehtävillä ja esitetyillä yhtälömuodoilla nähdään olevan huomattava merkitys algebran esittelyssä. Stephens ja muut (2006) huomasivat, että vaikka oppilas määrittelee yhtäsuuruusmerkin operationaalisesti, on hänen mahdollista muuttaa ajattelutapansa kohdatessaan visuaalisesti itsestään selviä epästandardeja yhtälöitä, kuten $39 + 121 = 121 + 39$ tai $5 + 3 = x + 3$. McNeil ja Alibali (2005a) tutkivat kontekstin vaikutusta siihen, miten eri-ikäiset oppilaat selittävät yhtäsuuruuden käsitteen. Tutkimuksessa pyydettiin selittämään yhtäsuuruusmerkin merkitys, mutta tehtävänannossa käytettiin sattumanvaraisesti kolmea eri kontekstia. Yhden kysymyksen yhteydessä oli pelkkä yhtäsuuruusmerkki, toisessa esimerkkinä oli $4 + 8 + 5 + 4 = x$ ja kolmannessa $4 + 8 + 5 = 4 + x$. Nuoremmilla ja vanhemmilla osallistujilla konteksti ei vaikuttanut vastaamiseen, mutta 7. luokan oppilailla vastaukset riippuivat kontekstista. He käyttivät virheellistä selitystä, jos yhtäsuuruusmerkki oli tehtävän yhteydessä yksin tai standardissa yhteydessä. Kolmannessa yhtälökontekstissa seitsemäsluokkalaisten selitys oli relationaalinen. (McNeil & Alibali, 2005a.) Tällaiset tulokset tukevat ajatusta, jonka mukaan erityyppisten yhtälöiden esittäminen auttaa oppilasta tulkitsemaan yhtäsuuruusmerkin relationaalisesti.

6.1 Yhtälötyyppien vaikutus oppilaan käsitykseen yhtäsuuruudesta

Tutkimuksessa tiedostetaan, että oppikirjat toimivat opetusvälineinä ja opettaja subjektiivisena toimijana tekee aina omat ratkaisunsa opetuksen suhteen. Oppikirjan sisällöt eivät siis kerro koko totuutta siitä, miten erilaiset matematiikan oppisisällöt opetetaan. Tiedostamme myös oppilaiden aseman oppikirjojen ja tehtävänantojen yksilöllisinä tulkitsijoina. Oppilaat voivat keksiä tehtäviin hyvinkin luovia, opettajan oppaassa annetusta muodosta poikkeavia ratkaisuja ja esimerkiksi käyttää yhtälöitä eri muodoissa. Oppilaan tekemien ratkaisujen huomioiminen vaatisi kuitenkin täysin eri tavalla toteutetun tutkimuksen.

Vaikka tutkimus ei huomioi opettajan roolia opetuksen toteuttajana, on oppikirjan merkityksestä tehty kotimaisia tutkimuksia, jotka antavat osviittaa opettajien tavasta suhtautua erilaisiin oppimateriaaleihin. Joutsenlahti ja Vainionpää (2010) ovat selvittäneet peruskoulun opettajien näkemyksiä oppimateriaalin tärkeydestä matematiikan opetuksessa. He esittivät 362 opettajalle väitteen “Etenen matematiikan opetuksessa oppikirjan mukaisesti sivu sivulta järjestyksessä eteenpäin tarjoten nopeille laskijoille lisätehtäviä”. Osallistujista liki 85 prosenttia ilmoitti olevansa samaa tai täysin samaa mieltä väitteen kanssa. (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010.) Perkkilä (2002) esitti saman väitteen 140 alkuopetuksen opettajalle, joista hieman yli puolet oli täysin tai osittain samaa mieltä. Tutkimusten valossa suomalaisessa peruskoulun matematiikan opetuksessa oppikirjan merkitys on suuri ja sitä käytetään laajalti opetuksen lähtökohtana. Näiden tutkimusten perusteella on oikeutettua esittää, että oppikirjojen sisällöillä on huomattava merkitys oppimisen kannalta.

I-kategorian yhtälöiden, joissa kysytty luku on yhtäsuuruusmerkin jälkeen oikealla, runsas esiintyminen opetusmateriaaleissa nähdään merkittävänä osasyynä operationaalisen käsityksen muodostumiselle (McNeil & Alibali, 2004; 2005a). Jos oppilas kohtaa matematiikan opiskelun alkutaipaleella pääsääntöisesti tässä muodossa olevia yhtälöitä, antaa hän herkästi yhtäsuuruusmerkille operationaalisen merkityksen. II-kategorian yhtälöt ovat usein muodoltaan vapaampia ja vaativat oppilaalta erilaista ajattelua kuin I-kategoriaan kuuluvien tehtävien yhtälöt. Yhtälöiden, kuten 2 + x = 5, ratkaiseminen vaatii monimutkaisempaa ajattelua, mutta oppilas voi yhä ratkaista nämä yhtälöt aritmetiikkaa käyttäen kokeilemalla ja päättelemällä. Lisäksi yhtälöissä yhtäsuuruusmerkki ja yksittäinen luku ovat yhä järjestyksessä viimeisenä. Tällainen muoto ei poikkea juurikaan yhtälöistä, joita oppilaat toistuvasti kohtaavat, joten ne eivät haasta oppilasta muokkaamaan virheellisiä käsityksiä.

I- ja II-kategoria ovat jokaisessa kahdeksassatoista oppikirjassa kaksi suurinta kategoriaa, mutta niiden keskinäisessä suuruusjärjestyksessä on kirjasarjakohtaisia eroavaisuuksia. Tuhattaiturissa puolessa tutkituista oppikirjoista II-kategoria on suurin ja puolessa I-kategoria. Kympissä I-kategoria on kaikissa kuudessa kirjassa suurin kategoria, kun taas Ykaakoossa kaikkien kirjojen suurin kategoria on II. Vaikka II-kategorian tehtävät ovat standardissa muodossa, ovat ne tehtävänannoltaan ja rakenteeltaan vapaamuotoisempia. I-kategorian tehtävät ovat hyvin mekaanisia ja rakenteeltaan toisiaan toistavia.

Kuten kuviosta 2 voidaan todeta, kaikissa kolmessa tutkimukseen valitussa kirjasarjassa kolmessa ensimmäisessä oppikirjassa vain standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuus on yli 80 prosenttia. Oppikirjat siis sisältävät oppilaan matematiikan opiskelun alkutaipaleella huomattavan määrän operationaaliseen käsitykseen ohjaavia standardeja yhtälöitä. Joutsenlahden ja Vainionpään (2010) sekä Perkkilän (2002) tutkimukseen nojaten näillä oppikirjan tehtävien sisältämillä yhtälöillä on merkitystä oppilaiden yhtäsuuruuteen liittyvän käsityksen muodostumisessa. McNeil (2007; draft) sekä Stephens ja muut (2013) ovat tutkimuksissaan havainneet operationaalisen tulkintatavan lisääntyvän ensimmäisten kouluvuosien aikana ja vähentyvän taas vähitellen algebran opetuksen lisääntyessä.

Ensimmäisten kouluvuosien aikana tapahtuvan operationaalisen käsityksen lisääntymisen syyksi nähdään huomattava aritmetiikan harjoittelu (McNeil, 2007). Aritmeettiset laskutoimitukset sisältävät pääasiassa standardissa muodossa olevia yhtälöitä. Tutkimukseen valituissa kolmessa kirjasarjassa standardeja yhtälöitä on ensimmäisissä oppikirjoissa huomattavan paljon, mutta niiden määrä laskee jälkimmäisissä kirjoissa. Tutkimustulosten perusteella on mahdollista, että oppikirjoja aktiivisesti käyttävien oppilaiden läpikäymä kehityskaari on samankaltainen kuin McNeilin (2007; draft) tutkimuksissa esitelty muutosvastaisuus. Standardissa muodossa olevien tehtävien säännöllinen ja yksipuolinen kohtaaminen johdattelee operationaalisen käsityksen muodostumiseen. Vaihtelevien yhtälötyyppien lisääntyminen auttaa käsityksen korjaamisessa, mutta virheellisen operationaalisen käsityksen syrjäytyminen relationaalisen käsityksen tieltä on kuitenkin hidas prosessi. Oppikirjoista ei kuitenkaan ole mahdollista näissä puitteissa tehdä suoria johtopäätöksiä, sillä opettajan rooli opetuksen toteuttajana on merkittävä.

III-kategoriaan kuuluvia tehtäviä tarkastellessa voidaan kyseenalaistaa, kehittävätkö kategorian kaikki tehtävät todellisuudessa relationaalista vai operationaalista käsitystä yhtäsuuruudesta. Vaiheittain laskua sisältävät yhtälöt avaavat yhtäsuuruuden transitiivisuutta. Esimerkiksi yhtälöstä $2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$ voidaan poistaa välivaihe ilman, että yhtälö muuttuu epätodeksi. Tällöin yhtälöstä voidaan tehdä johtopäätös $2 + 3 \cdot 2 = 8$, mutta kiinnitetäänkö opetuksessa huomiota tähän. Jos vaiheet ovat puhtaasti vain laskemista ja niiden tarkoitus on päätyä yhtälön lopussa ilmoitettuun ratkaisuun, operationaalisuus korostuu. Oppikirjojen olisi mahdollista korostaa kaikkien lausekkeiden yhtäsuuruutta ja välivaiheen merkitystä tässä kontekstissa, mutta yksikään oppikirja ei ohjeistuksessaan huomioinut tätä.

IV-kategoria muodostuu tehtävistä, jotka sisältävät muotoa $4 = 2 + 2$ olevia yhtälöitä. Tällaiset yhtälöt poikkeavat standardissa muodossa esitetyistä yhtälöistä siten, että niissä yhtälön alussa on yksi luku ja yhtäsuuruusmerkki. Operationaalisesti yhtäsuuruusmerkin tulkitsevilla oppilailla voi olla vaikeuksia ymmärtää tällaisia yhtälöitä, sillä yhtälö voi näyttää olevan väärinpäin (Stephens et al., 2013). Tutkimukseen valittujen oppikirjoissa IV-kategoriaan kuuluvissa tehtävissä oppilaan tulee useimmiten valita oikea merkki (>, < tai =) yhtälöön tai ratkaista yhtälössä oleva tuntematon. Ensimmäisen kaltaiset tehtävät ratkaistakseen oppilaan tulee huomata, että yhtäsuuruusmerkin molempien puolien tulee olla kokonaisuudessaan yhtä suuret. Jälkimmäinen tehtävä taas korostaa oppilaan yhtälönratkaisustrategioita. Osissa tehtävistä oppilaan tulee myös purkaa annettu luku yhteen- tai kertolaskuihin. Tällaiset tehtävät auttavat oppilasta hahmottamaan lukujen välisiä yhteyksiä: luvun purkaminen osiin korostaa sitä, että tietty arvo voidaan muodostaa useammalla tavalla.

V-kategoriaan kuuluvat tehtävät, jotka sisältävät muotoa $5 - 1 = 2 + 2$ olevia yhtälöitä. IV-kategorian tavoin tällaisia yhtälöitä sisältävissä tehtävissä oppilasta ohjeistetaan usein valitsemaan oikea merkki (>, < tai =) yhtälöön tai ratkaisemaan yhtälössä oleva tuntematon. Tällaiset yhtälöt ovat aikaisemmissa tutkimuksissa osoittautuneet hankaliksi ratkaista, sillä oppilaat ovat tottuneet yhtälöihin, joissa yhtäsuuruusmerkin jälkeen tulee vasemmalla puolella olevan laskuoperaation vastaus (Kieran, 1981; Falkner et al., 1999; Stephens et al., 2013). Ne nähdään siten myös tehokkaana keinona relationaalisen käsityksen kehittämisessä. Mikäli oppilaille esitetään yhtälö tässä muodossa, he ovat taipuvaisempia määrittelemään yhtäsuuruusmerkin relationaalisesti, vaikka he määrittelisivät sen operationaalisesti standardissa kontekstissa (McNeil & Alibali, 2005a). Tämä ei kuitenkaan takaa sitä, että oppilas osaisi yhdistää antamansa erilaisen määritelmän myös standardissa muodossa oleviin yhtälöihin.

Uusi laskuoperaatio yhtäsuuruusmerkin jälkeen edellyttää oppilaalta erilaista yhtälönratkaisustrategiaa, eikä oppilas välttämättä löydä sitä omin neuvoin. Tällaisten yhtälöiden haastavuuden taustalla on, että ne ovat osittain samanlaisia kuin standardissa muodossa olevat yhtälöt poiketen niistä vain hieman. Esimerkiksi yhtälöä 5 – 1 = x + 2 ratkaistessaan yhtäsuuruusmerkin operationaalisesti tulkitseva oppilas voi laskea kaikki luvut yhteen ja ilmoittaa ratkaisun tuntemattoman kohdalla. Oppilas voi myös jättää yhtäsuuruusmerkin jälkeen tulevan operaation huomioimatta kohdellen jäljelle jäänyttä osaa kuin tavallista standardia yhtälöä. (Falkner et al., 1999.) Mikäli yhtälö on muotoa 5 – 1 = 2 + x, johdattelee operationaalinen ajattelutapa suorittamaan kaikki annetut operaatiot ja ilmoittamaan niiden ratkaisun tuntemattoman kohdalla.

Murtolukujen tulkitseminen operaatioina asettaa tiettyjä vaatimuksia V-kategoriaan luokiteltujen tehtävien analyysille. Yhtälöinä 2⁄4 = 1⁄2 ja esimerkiksi 2 + 2 = 5 – 1 eivät ole täysin samanlaiset, ja uskomme oppilaiden käsittelevän niitä eri tavoin etenkin opettajasta ja opetusmateriaalista riippuen. Mikäli oppilasta esimerkiksi pyydetään valitsemaan oikea merkki, jotta kahden murtoluvun muodostama yhtälö olisi tosi, hän tuskin ratkaisee sitä samalla tavalla kuin vastaavasti ohjeistettua tavallisista luvuista ja operaatioista muodostuvaa yhtälöä. Uskomme tällaisessa tapauksessa oppilaan lähestyvän murtolukuyhtälöä kuten hän lähestyisi muotoa 7 = 7 olevaa yhtälöä. Yykaakoo- ja Kymppi-kirjasarjassa kaikki kolmannen vuoden kevään oppikirjan viidennen kategorian tehtävät koostuvat murtolukuja sisältävistä yhtälöistä. Tuhattaiturin kolmannen vuoden kevään kirjan tilanne on lähes sama, lukuun ottamatta yhtä tehtävää, joka ei liity murtolukuihin. Koska tulkintatapa vaikuttaa vain yhden kevään oppikirjoihin, ei sitä nähty tarpeelliseksi muuttaa.

Stephens et al. (2013) sekä Kieran (1981) näkevät VI-kategorian tyyppisten yhtälöiden, kuten 7 = 7, olevan oppilaille hankalia tulkita, koska niistä puuttuu selkeä toiminto eli operaatio. Kun ei ole suoritettavaa laskutoimitusta, operationaalisesti yhtäsuuruutta tulkitseva oppilas voi hämmentyä. Operationaalisesti ajatteleva oppilas näkee yhtäsuuruusmerkin käskynä toteuttaa annettu operaatio, jolloin operaation puuttuminen yhtälöstä poikkeaa oppilaan ajattelutavasta täysin. Falknerin ja muiden (1999) tutkimuksessa ensimmäisen ja toisen luokan oppilaille esitettiin erilaisia yhtälöitä, ja nähdessään yhtälön muotoa 8 = 8 oppilaat tunnistivat sen olevan tosi, mutta eivät pitäneet kirjoitustapaa oikeana. Tässä tutkimuksessa ilman operaatioita muodostettuja identiteettiyhtälöitä sisältävien tehtävien ohjeistuksena on usein vain valita >, < tai = lukujen väliin siten, että yhtälö on tosi. Tehtävät ovat helposti mekaanisia eivätkä vaadi syvempää ymmärtämistä, kun soveltaminen ei ole mahdollista.

Jokaisessa valitussa kolmessa kirjasarjassa VI-kategoriaan kuuluvia tehtäviä on eniten ensimmäisen vuosiluokan syyslukukauden oppikirjassa. Muissa kirjoissa kategoriaan kuuluvia identiteettiyhtälöitä sisältäviä tehtäviä on selkeästi vähemmän. Esimerkiksi Kympissä tehtäviä on ainoastaan ensimmäisen luokan syksyn ja kolmannen luokan kevään oppikirjoissa (taulukko 6). Tästä voitaisiin päätellä, että kyseisiä yhtälöitä ei nähdä tarpeellisina harjoitella johdonmukaisesti. Taustalla voi olla ajatus, että muotoa 7 = 7 olevat yhtälöt ovat helppoja ymmärtää ja työstää, jolloin niitä ei tarvitse käsitellä myöhemmillä luokilla. Yksi yhtäsuuruusrelaation ominaisuuksista on, että jokainen luku relaatiossa itsensä kanssa, minkä takia näihin yhtälöihin tulisi kuitenkin kiinnittää säännöllisesti huomiota. Yhtälöt ovat myös ristiriidassa operationaalisen yhtäsuuruusmerkin tulkintatavan kanssa, jolloin ne auttavat virheellisen käsityksen korjaamisessa.

Mittayksikkömuunnokset muodostavat VII-kategorian. Tämän kategorian kohdalla tutkimuksessa jouduttiin hieman joustamaan luokittelun keskeisessä ajatuksessa, jonka mukaan yhtälöä tarkastellaan kokonaisuutena. Esimerkiksi yhtälö 200 cm + 200 cm = 400 cm = 4 m sisältää luotujen kategorioiden näkökulmasta sekä vaiheittain laskua että mittayksikkömuunnoksen. Tällaisia yhtälöitä sisältävät tehtävät sijoittuvat täten sekä III- että VII-kategoriaan. Ne poikkeavat muunlaisista vaiheittain laskemista sisältävistä yhtälöistä, sillä välivaiheen jälkeen tuleva luku ei ole suoraan kytköksissä laskuoperaatioon, vaan toisenlaiseen toimintoon, mittayksikkömuunnokseen. Yhtälöt, kuten 7 cm = 70 mm, muistuttavat VI-kategorian tehtäviä, mutta vaativat oppilaalta piilossa olevan operaation suorittamista. Oppilaan tulee muuntaa luvut samaan yksikköön varmistaakseen, että yhtälö on tosi.

Analyysivaiheessa tutkimuksen aineistosta nousi esiin pieni luokitteluvirhe, joka liittyy VII-kategoriaan. Tehtävät, jotka ovat muotoa 1⁄2 m = 50 cm, sijoittuvat virheellisesti vain mittayksikkömuunnoksien muodostamaan VII-kategoriaan. Tällaisten yhtälöiden tulisi kuulua myös I- tai II-kategoriaan riippuen siitä, täytyykö oppilaan ratkaista yhtäsuuruusmerkin jälkeen tuleva luku vai ei. Yhtälöt sisältyvät virheellisesti vain VII-kategoriaan, koska yhtälöön kuuluva murtoluku jäi tiedostamatta. Tällaisia tehtäviä on kaikissa tutkimukseen sisällytetyissä oppikirjoissa yhteensä yhdeksän ja ne kaikki ovat Kymppi-kirjasarjan kolmannen luokan kevään kirjassa. Virhe havaittiin niin myöhäisessä vaiheessa, että sen korjaaminen olisi ollut todella työlästä. Virheen vaikutus tutkimustulosten kannalta ei ole merkittävä, joten koimme riittäväksi ratkaisuksi tuoda aiheen esille johtopäätöksissä.

6.1.1 Yhtälöiden moninaisuus oppikirja- ja tehtävätasolla

IV-, V- ja VI -kategoriaan kuuluvien tehtävien sisältämien yhtälöiden todetaan useassa tutkimuksessa (muun muassa Stephens et al., 2013; Falkner et al., 1999) tuottavan vaikeuksia oppilaille, joilla on operationaalinen käsitys yhtäsuuruusmerkistä. Yhtälöt eivät vastaa jo olemassa oleviin tietorakenteisiin, mikä johdattelee oppilasta kyseenalaistamaan niitä ja jopa muuttamaan omaa yhtäsuuruuteen liittyvää käsitystään. Tutkimukseen valituissa kirjasarjoissa tehtävien määrät vaihtelevat huomattavasti. Tuhattaiturissa näihin kolmeen kategoriaan kuuluvia tehtäviä on kaikkiaan 155, joka vastaa 13,5 prosenttia kaikista oppikirjan tutkimuksessa huomioiduista tehtävistä. Kympissä puolestaan lukumäärä on 24, joka on 1,7 prosenttia kaikista tehtävistä. Ykaakoossa kategorioihin kuuluu 10,2 prosenttia kaikista tehtävistä, mikä vastaa 97 tehtävää. Kymppi-kirjasarjassa näihin kolmeen kategoriaan kuuluvien tehtävien osuus on todella pieni verrattuna kahteen muuhun kirjasarjaan, mikä kertoo myös vaihtelun eroavaisuuksista oppikirjan tasolla.

Taulukot 5, 6 ja 7 havainnollistavat, mihin kategorioihin ei sisälly lainkaan tehtäviä jokaisen kirjasarjan yksittäisissä oppikirjoissa. Tehtävien tasainen sijoittuminen useaan kategoriaan kertoo kirjassa käytettyjen yhtälöiden monipuolisuudesta. VIII-kategoriaan kuuluvia poikkeavassa muodossa olevia yhtälöitä sisältäviä tehtäviä ei huomioida oppikirjojen moninaisuutta tarkasteltaessa. Tuhattaituri-kirjasarjassa on vuosiluokkien 1–3 oppikirjoissa yhteensä seitsemän kategoriaa, jotka jäävät kokonaan tyhjiksi, kun oppikirjoja tarkastellaan toisistaan erillään. Ensimmäisen vuosiluokan kirjoissa III-kategoriaan ei sisälly tehtäviä, VII-kategoriaan kuuluvia tehtäviä puolestaan on vain toisen ja kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjassa. Kolmannen luokan kevään kirjassa ei myöskään ole VI-kategoriaan sisältyviä tehtäviä.

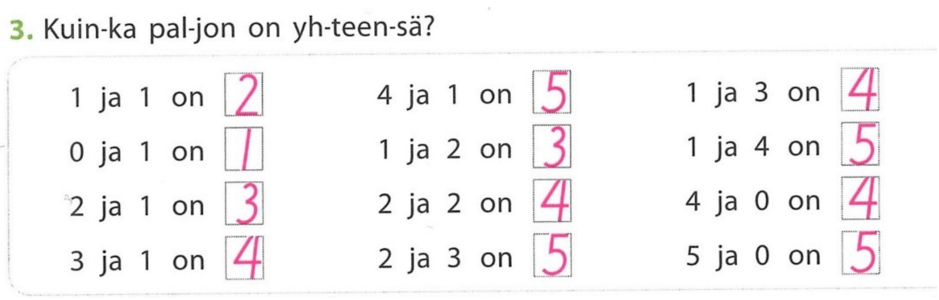
Kymppi-kirjasarjan kirjoissa tyhjiksi jää yhteensä neljätoista kategoriaa. Kolmesta ensimmäisestä kirjasta III-kategoriaan ei kuulu yhtään tehtävää. VI-kategoriaan sijoittuvia tehtäviä on vain ensimmäisen luokan syksyn ja kolmannen luokan kevään oppikirjoissa. VII-kategoriaan sijoittuvia tehtäviä taas on toisen luokan molemmissa kirjoissa. IV-kategoria jää tyhjäksi ensimmäisen luokan kevään ja toisen luokan syksyn kirjassa, ja V-kategoriaan ei sisälly tehtäviä toisen luokan syksyn kirjassa. Näiden kahden sekä VI-kategorian tehtävämäärät ovat yleisesti hyvin pieniä, joten tyhjien kategorioiden merkitys on pieni. Toisen vuosiluokan syksyn kirjassa on ainoastaan kahteen kategoriaan sijoittuvia tehtäviä. Myös ensimmäisen vuosiluokan kevään oppikirjan yhtälöitä sisältävät tehtävät sijoittuvat eri kategorioihin varsin heikosti: kaikki tehtävät kahta lukuun ottamatta sijoittuvat kahteen kategoriaan.

Ykaakoo-kirjasarjassa kaikkiaan yhdeksän kategoriaa jäävät ilman tehtäviä. Ykaakoossa oppikirjojen tyhjiksi jääneet kategoriat jakautuvat tasan kolmen eri kategorian kesken. Ensimmäisen vuosiluokan molemmissa oppikirjoissa sekä toisen luokan kevään kirjassa III-kategoriaan ei sisälly lainkaan tehtäviä. VI-kategoria jää tyhjäksi viimeisessä kolmessa oppikirjassa. VII-kategoriaan ei sisälly tehtäviä ensimmäisen luokan molemmissa ja kolmannen luokan syksyn oppikirjassa.

Taulukoiden 8, 9 ja 10 kuvaamat kahden tai kolmen kategorian yhdistelmät sekä niihin sijoittuvien tehtävien määrät kertovat tehtävätason moninaisuudesta. Tuhattaiturissa kategoriayhdistelmiä on 15 erilaista, kun taas Kympissä niitä on 8 ja Ykaakoossa 13. Kaikista tutkimukseen sisällytetyistä tehtävistä kahteen tai kolmeen kategoriaan sisältyy Tuhattaiturissa 13,3 prosenttia, Kympissä 9,6 prosenttia ja Ykaakoossa 12,6 prosenttia. Osuudet ovat melko pieniä, eikä niiden välillä ole suuria eroavaisuuksia. Uskomme etenkin tehtävätason moninaisuuden olevan oleellista relationaalisen yhtäsuuruuskäsityksen muodostumisen kannalta. Mikäli oppilas kohtaa yksittäisessä tehtävässä eri muotoa olevia yhtälöitä, täytyy hänen aktiivisesti kiinnittää huomiota esitettyyn muotoon. Jos taas tehtävä sisältää ainoastaan samassa muodossa olevia yhtälöitä, muodostuu niiden ratkaisemisesta helposti mekaaninen prosessi, joka ei saa oppilasta haastamaan omia käsityksiään.

6.1.2 Matemaattisista säännöistä poikkeavat yhtälöt

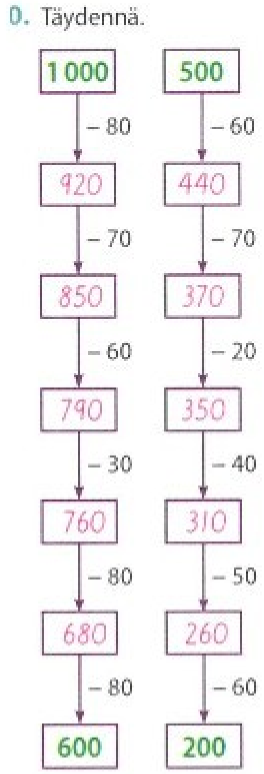
Oppikirjojen käyttämät yhtälöt ja tehtävät eivät ole aina selkeitä muodossaan. Oppikirjoissa esiintyy tehtäviä, jotka ovat puhtaasti matemaattisten sääntöjen ja periaatteiden kannalta tarkasteltuna kyseenalaisia, kuten kuvan 28 tehtävä. Matemaattiselle kielelle kirjoitetun yhtälön sijasta laskutehtävät on kirjoitettu sanoin tavalla “1 ja 1 on 2”. Kirjoitetun muodon takia tehtävä ei sisälly tutkimuksen aineistoon, mutta näimme kuitenkin oleellisena kiinnittää siihen huomiota. Ilmaisu on toki tiivis, mutta omiaan aiheuttamaan väärinkäsityksiä. Tehtävänannossa kehotetaan vastaamaan annettujen lukujen summa, tarkalleen sanoilla “paljonko on yhteensä”. Kirjoitettu lause mukailee standardin yhtälön muotoa, jolloin plusmerkin paikalla on “ja”-sana. Yhtäsuuruusmerkki taas on korvattu “on”-verbillä, mikä vastaa selkeästi operationaalista käsitystä yhtäsuuruudesta, jolloin yhtäsuuruusmerkin tulkitaan tarkoittavan vastauksen antamista. Tehtävä on ensimmäisen vuosiluokan syksyn oppikirjassa, jolloin matematiikan opiskelu on vasta aluillaan.


3. Kuin-ka pal-jon on yh-teen-sä?

1 ja 1 on 2	4 ja 1 on 5	1 ja 3 on 4
0 ja 1 on 1	1 ja 2 on 3	1 ja 4 on 5
2 ja 1 on 3	2 ja 2 on 4	4 ja 0 on 4
3 ja 1 on 4	2 ja 3 on 5	5 ja 0 on 5

Kuva 28. Yhtäsuuruusmerkin korvaaminen “on”-sanalla. Teoksesta “Open Kymppi 1 syksy”, Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T., 2012, s. 41. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Toinen vastaava mahdollisesti virheellisiin käsityksiin johdatteleva merkitsemistapa on esiteltynä kuvan 29 tehtävässä, jossa erilaiset laskutoimitukset on laitettu peräkkäin suoritettaviksi. Tehtävä ei myöskään sisälly aineistoon, mutta herättää kysymyksiä ilmaisun oikeellisuudesta. Tehtävässä on alussa luku, josta vähennetään määrätty luku. Erotuksesta vähennetään taas seuraava luku, ja niin edelleen. Tällainen rakenne voi kannustaa kirjoittamaan laskutoimitukset peräjälkeen myös yhtälöissä, esimerkiksi $10 + 2 = 12 + 2 = 14$. Tällainen ilmaisutapa ei noudata yhtäsuuruuteen liittyvää transitiivisuuden ominaisuutta, sillä $10 + 2 = 12 + 2$ tai $10 + 2 = 14$ eivät pidä paikkaansa. Yhtäsuuruuden transitiivisuus on haastava sisäistää oikein, jos opetus mahdollistaa tällaisen ajattelun. Kuvan 29 kaltaisia erilaisia tehtäviä on jokaisessa kirjasarjassa.



Kuva 29. Laskuoperaatioiden kirjaaminen nuolilla peräkkäin ilman yhtäsuuruusmerkkiä. Teoksesta "Yykaakoo 3A: Opettajan opas", Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M., 2014, s. 84. Helsinki: Edukustannus Oy.

Yykaakoo-kirjasarjan toisen vuosiluokan syyslukukauden oppikirjassa on kaksi tutkimukseen kuuluvaa tehtävää, joissa kertolaskujen kertojan ja kerrottavan vaihdannaisuutta on havainnollistettu muotoa $24 = 8 \cdot 3,\ 3 \cdot 8$ olevilla yhtälöillä. Tehtävät sijoittuvat IV-kategoriaan, mutta ovat matemaattisten sääntöjen kannalta kyseenalaistettavia. Lausekkeiden erottamiseen pilkulla ei ole mitään matemaattista perustetta, ja oikea tapa ilmaista yhtälö olisi esimerkiksi $24 = 8 \cdot 3 = 3 \cdot 8$. Tehtäviä esiintyy kaikissa tutkituissa oppikirjoissa ainoastaan yhteensä kaksi kappaletta, mutta pienestä määrästä huolimatta oppikirjojen ei mielestämme tulisi sisältää matemaattisia periaatteita rikkovia tehtäviä.

Edellä mainitun kaltaisia tehtäviä ei määrällisesti ole oppikirjoissa paljon, mutta niitä on kuitenkin jokaisella vuosiluokalta ja jokaisessa kirjasarjassa. Ne nousevat vahvasti esille yhtäsuuruuden käsittelyä tutkittaessa, sillä niiden tehtävänannot ja rakenteet ovat ristiriidassa matemaattisten periaatteiden ja sääntöjen kanssa. Ne voivat johdatella oppilasta virheellisiin tulkintoihin, jos opetuksessa ei kiinnitetä asiaan huomiota.

6.2 Opetussuunnitelman ja oppikirjojen sisältöjen vaikutus tuloksiin

Tutkimuksessa valittujen kirjasarjojen välillä ilmeni selkeitä yhteneväisyyksiä. Kaksi suurinta kategoriaa ovat jokaisessa oppikirjassa samat, ja ainoastaan standardeja tai epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuuksia vertailtaessa kirjasarjoissa oli havaittavissa yhteneväisiä muutoksia. Oppikirjojen ja opetussuunnitelman perusteiden sisällöistä on mahdollista löytää syitä sille, miksi tämän tutkimuksen tulokset ovat juuri esitellyn kaltaiset.

Opetussuunnitelman perusteissa (2015) aritmetiikan ja erilaisten laskutoimitusten merkitystä korostetaan paljon, mikä näkyy myös oppikirjoissa I- ja II-kategoriaan kuuluvien tehtävien suurina määrinä. Erilaisia laskutoimituksia harjoitellaan paljon ja ne on yleisimmin esitetty muodossa, jossa yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella on operaatio ja oikealle puolelle tulee tämän operaation ratkaisu. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2015) teemoja tarkastellaan hyvin laajoina kokonaisuuksina, joten tarkempien johtopäätösten tekeminen vaatii oppikirjojen sisältöjen tarkastelua. Oppikirjat toistavat selkeästi toistensa rakennetta ja etenevät hyvin samanlaista tahtia.

VII-kategoriaan kuuluvia tehtäviä esiintyy kaikissa kirjasarjoissa ainoastaan toisen ja kolmannen vuosiluokan kevään oppikirjoissa, lukuun ottamatta Yykaakoon toisen luokan syksyn kirjaa, jossa mittayksikkömuunnoksia sisältäviä tehtäviä on yksi. Mittaaminen ja erilaiset mittayksiköt esitellään kaikissa kirjasarjoissa jo aikaisemmin, mutta muunnokset yksiköstä toiseen aloitetaan pääsääntöisesti toisen luokan keväällä ja niiden harjoittelua jatketaan kolmannen luokan keväällä. Kolmannen luokan syksyn oppikirjojen sisällöissä mittayksiköihin liittyviä teemoja on vähän. (Liite 1.) Joihinkin sisältöihin, esimerkiksi geometristen muotojen piirien mittaamiseen, on mahdollista sisällyttää mittayksikköjen muuntamista, mitä ei ilmeisesti kuitenkaan nähdä oleellisena.

III-kategoria ei ole lainkaan edustettuna ensimmäisen luokan syys- ja kevätlukukauden oppikirjoissa. Ensimmäisen vuosiluokan aikana harjoiteltavat laskutoimitukset ovat yhteen- ja vähennyslaskuja pienillä luvuilla (Liite 1). Näihin peruslaskutoimituksiin liittyvät oleellisesti kymmenylitykset, joissa on mahdollista käyttää apuna välivaihetta, kuten $7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 13$. Valitut kirjasarjat eivät kuitenkaan tuo tällaisissa oppikirjojen tehtävissä esille laskemisessa käytettyjä strategioita. Kymmenylitystä voidaan pitää niin yksinkertaisena laskuna, ettei strategian vahva esille tuominen ole tarpeen. Kuitenkin myöhemmin suuremmilla luvuilla laskettaessa ja esimerkiksi laskujärjestystä havainnollistettaessa välivaiheen esittäminen nähdään oleellisena.

Syytä sille, että kevään oppikirjoissa tutkimukseen soveltuvia tehtäviä on vähemmän, voi hakea opetettavista aiheista. Kevään oppikirjat voivat sisältää enemmän esimerkiksi allekkainlaskua ja geometriaa, tai ylipäänsä soveltavia tehtäviä. Esimerkiksi kaikkien valittujen kirjasarjojen toisen vuosiluokan kevään oppikirjoissa esitellään allekkainlasku ja harjoitellaan sitä, lukuun ottamatta Tuhattaituria, jossa allekkainlasku esitellään jo syksyn oppikirjassa. Kevään oppikirjassa yksi keskeisistä teemoista on mittaaminen, joka aiheena tarjoaa enemmän soveltavia tehtäviä. Toisen luokan syksyn oppikirjan teemat sisältävät huomattavasti peruslaskutoimituksia: oppikirjassa muun muassa kerrataan kertotaulua ja kymmenylityksiä, sekä lasketaan suuremmilla luvuilla. (Liite 1.) Peruslaskutoimitusten harjoitteluun käytetään yleensä standardissa muodossa olevia yhtälöitä.

Eri sisältöjen jakautuminen lukuvuosien välille selittää omalta osaltaan saatuja tutkimustuloksia. Tässä tutkimuksessa ei kuitenkaan perehdytä syvemmin oppikirjojen sisältöihin ja niiden osuuteen tulosten selittäjänä, sillä kattavien johtopäätösten tekeminen vaatisi kokonaan omaa tutkimusta. Asetetut tutkimuskysymykset eivät vaadi oppikirjojen sisältöjen ja tulosten välisen yhteyden tarkastelua, vaikkakin se on oleellista tiedostaa.

6.3 Tutkimuksen kehittäminen

Tutkimuksen ja siitä tehtyjen johtopäätösten tueksi olisi mielenkiintoista toteuttaa kyselytutkimus, joka selvittäisi oppilaiden käsityksiä yhtäsuuruudesta ja yhtäsuuruusmerkistä. Avoimilla kysymyksillä ja tarkasti valituilla monivalintakysymyksillä on mahdollista tutkia oppilaiden tapoja ratkaista yhtälöitä ja tätä kautta selvittää heidän tapansa tulkita yhtäsuuruutta. Esimerkiksi Stephens et al. (2013) ovat kyselytutkimuksen avulla luokitelleet oppilaiden käsitykset yhtäsuuruusmerkistä operationaaliseen sekä kahteen eri relationaaliseen käsitykseen. Tutkimuksessa on eroteltu toisistaan relationaalisen käsityksen omaavat oppilaat, jotka varmistavat yhtälön ratkaisun laskemalla, ja oppilaat, jotka pystyvät käsittelemään lausekkeita sellaisenaan ratkaistakseen yhtälön. (Stephens et al., 2013.) Tällainen tutkimus auttaisi selvittämään, onko oppikirjoissa esiintyvillä yhtälötyypeillä ja niiden määrillä yhteyttä oppilaiden tulkintoihin yhtäsuuruusmerkistä sekä heidän käyttämiin yhtälönratkaisustrategioihin. Pohdimme kyselytutkimusta vaihtoehtona, mutta valitsimme oppikirjat.

Oppilaiden tekemistä päätelmistä ja niiden perusteluista voi paremmin nähdä heidän todellisen ymmärryksen yhtäsuuruuden käsitteestä. Esimerkiksi Mann (2004), Falkner ja muut (1999) sekä Sáenz-Ludlow ja Walgamuth (1998) ovat käyttäneet tutkimuksissaan luokassa käytyjä keskusteluja selvittäessään oppilaiden käsityksiä yhtäsuuruudesta. Oikeanlaisen ohjaavan kysymyksenasettelun avulla on mahdollista selvittää, millä tavalla oppilaat tulkitsevat yhtäsuuruusmerkin ja yhtäsuuruuden käsitteen. Epäilemme kuitenkin, vaaditaanko oppilailta todellisuudessa kunnollisia perusteluja, joista opettaja pystyisi näkemään oppilaiden ongelmanratkaisustrategioiden taustalla olevat käsitykset yhtäsuuruudesta. Sanallistaessaan ajatteluprosessejaan oppilas voi myös reflektoinnin kautta tulla tietoisemmaksi omista ajattelu- ja toimintamalleistaan.

Hattikudur ja Alibali (2010) ovat tutkineet, auttaako vastakkaisen käsitteen esittely jonkin tietyn käsitteen opettamisessa. Tutkimuksessaan he keskittyivät oppilaiden yhtäsuuruusmerkkiin liittyvien käsitysten kehitykseen silloin, kun opetukseen sisällytetään muitakin lukujen välisiä suhteita kuvaavia symboleita. Tulosten mukaan oppilaat saavat paremman käsityksen yhtäsuuruusmerkistä, jos vertailevat sitä muihin symboleihin. Muita lukujen välisiä suhteita kuvaavia symboleita ovat muun muassa > ja <, mutta etenkin vertailu ≠-merkin kanssa oli tehokasta. (Hattikudur & Alibali, 2010.) Erisuuruusmerkki kantaa päinvastaista merkitystä yhtäsuuruusmerkkiin verrattuna. Se voi esimerkiksi ilmaista jonkin yhtälön olevan epätosi, kuten $2 + 4 \neq 7$. Tutkituissa kirjasarjoissa merkki ei esiinny lainkaan, joten tulosten analyysissä emme voineet ottaa kantaa merkin käyttöön oppikirjoissa. Hattikudurin ja Alibalin esitys ≠-merkin hyödyllisyydestä antaa kuitenkin mielenkiintoisen näkökulman yhtäsuuruuden käsitteen tutkimiseen.

Pohdimme pitkään, miten käsittelemme murtolukuja sisältäviä yhtälöitä päätyen tulkitsemaan ne operaatioina. Murtolukuja on mahdollista käsitellä myös lukuina, kuten McNeil et al. (2006) ovat tutkimuksessaan tehneet. Näemme molemmissa tavoissa hyviä ja huonoja puolia. Murtolukujen tulkitseminen operaatioina mahdollisti operaatiottomien identiteettiyhtälöiden ($7 = 7$) erottelun kokonaan, mutta tällöin muotoa $2/4 = 1/2$ olevat yhtälöt sisältyvät kategoriaan, jossa yhtälön molemmin puolin on operaatio. Valitsemamme kategoriajako osoittautui kuitenkin toimivaksi ja saimme nostettua esille tutkimuskysymysten kannalta oleellisia seikkoja, joten emme nähneet tarpeellisena muuttaa valittua tulkintatapaa.

Mikäli murtoluvut olisi tulkittu lukuina, olisimme saaneet eroteltua tehokkaammin muotoa 2 + 2 = 5 – 1 olevat yhtälöt, mutta kategoriajakoa olisi täytynyt muunnella huomattavasti. Yhtälöille kuten 2⁄4 = 1⁄2 olisi pitänyt muodostaa oma kategoriansa, tai identiteettiyhtälöt sisältävän kategorian määritelmää olisi pitänyt muokata siten, että muotoa 2⁄4 = 1⁄2 olevat yhtälöt olisi voinut sijoittaa kategoriaan. Tällöin taas emme olisi saaneet eroteltua identiteettiyhtälöitä, minkä kuitenkin koimme tutkimuksen kannalta oleelliseksi. Murtolukujen tulkitseminen lukuina olisi muuttanut alakategorioiden jaottelua ja antanut hieman erilaisia tuloksia. Murtolukuja sisältävien tehtävien määrät olivat kaikissa kirjasarjoissa kuitenkin niin pieniä, että valinnalla ei ollut lopulta suurta merkitystä. 1.–3. vuosiluokan oppikirjoja analysoitaessa valinnan vaikutus ei ole suuri tulosten kannalta, mutta analyysin jatkaminen ylempien luokkien oppikirjoihin saattaisi luoda tarpeen tarkastella asiaa toisesta näkökulmasta.

6.4 Tutkimuksen eettisyys ja luotettavuus

Tämän tutkimuksen luotettavuutta tarkastellaan etenkin triangulaation, systemaattisuuden, läpinäkyvyyden ja kirjallisen työn vaatimusten näkökulmasta.

Luotettavuus ei ole kriteeri, joka on joko kokonaan tai ei ollenkaan. Kyse on asteesta eli siitä, kuinka pitkälle tutkimus on luotettava. (Schreier, 2012.) Luotettavuuden merkityksestä kvalitatiivisessa tutkimuksessa on useita eriäviä mielipiteitä. Osa tutkijoista hylkää sen kokonaan, osa soveltaa sen kriteerejä ja toiset muokkaavat luotettavuuden ajatusta sopivammaksi. Yhden tällaisen muokkauksen mukaan tutkijoiden tulee toimia systemaattisella tavalla, tehden läpinäkyväksi lukijoilleen sen, miten päätyvät tulkintoihinsa ja johtopäätöksiinsä. Laadullinen sisällönanalyysi olettaa tutkijan toimivan systemaattisesti, jolloin tutkimusta pidetään luotettavana. (Schreier, 2012.) Tässä tutkimuksessa läpinäkyvyys ja systemaattisuus ovat oleellisia etenkin aineiston rajaamiseen ja luokitteluun käytettyjen perusteiden avaamisessa.

Krippendorff (2004) näkee toistettavuuden sisällönanalyysin luotettavuuden tärkeimpänä mittaajana. Tutkimuksen johdonmukaisuuden voi tarkistaa esimerkiksi antamalla toisen henkilön koodata osan aineistosta tai koodaamalla aineiston itse 10–14 päivän kuluttua uudestaan. Jos luokittelun määritelmät ovat selkeät ja alakategoriat eivät mene päällekkäin, kahden eri koodauksen lopputulosten pitäisi olla suunnilleen samat. Jos koodauskertojen tulokset eroavat toisistaan systemaattisesti, täytyy luokittelua miettiä uudestaan. (Schreier, 2012.) Lopulliset luokitteluperusteet syntyivät tehtävien jaottelun lomassa ja niiden luotettavuutta testattiin koodaamalla kaikki aineisto kahteen kertaan.

Koko aineisto koodattiin kahteen kertaan siten, että molemmat luokittelivat itsenäisesti kaikki aineistoksi valitut oppikirjat. Mikäli tehtävä ei selkeästi sijoittunut yhteen tai useampaan kategoriaan, tai ilmeni muita syitä muokata kategorioiden määritelmiä, tehtiin vaadittavat muokkaukset keskustelun tuloksena luokittelun lomassa. Ajoittainen keskustelu ja kategoriamääritelmien hiominen oli välttämätöntä, sillä osa aineistosta nousseista ristiriidoista ei ollut ennakoitavissa. Valitut suomalaiset matematiikan oppikirjat sisältävät tämän tutkimuksen kannalta tulkinnanvaraisia tehtäviä, joten objektiivisten luokitteluperusteiden laatiminen tuotti haasteita. Pyrimme kuitenkin läpinäkyvyydellä ja selkeillä esimerkeillä lisäämään toistettavuutta. Luokittelun jälkeen tuloksia verrattiin keskenään ja havainnoitiin esiintyviä eriäväisyyksiä. Tällainen menettely auttoi huolimattomuusvirheiden eliminoimisessa.

Triangulaatio käsitteenä voi liittyä tutkimusta toteuttavien henkilöiden määrään tai menetelmien monipuolisuuteen. Tutkijatriangulaatioksi nimitetään sitä, kun samaa ilmiötä tutkii useampi tutkija (Saaranen-Kauppinen & Puusniekka, 2009). Kahdestaan yhteistyötä tehden tekstiä lukee koko ajan kaksi paria kriittisiä silmiä, joten kaikki kirjoitettu on sen puolesta perusteltua. Ristiriitatilanteessa se, kumman perustelut ovat paremmat ja kattavammat, saa kantansa läpi ja lähes poikkeuksetta myös toisen vakuutettua puolelleen. Kaksi tutkijaa lisää siten suurella todennäköisyydellä tutkimuksen luotettavuutta, sillä mielipiteet eivät ole yhden ihmisen tulkintoja. Luotettavuuden lisääntymisen ehtona tosin on, että tutkijat toimivat jatkuvasti aidosti yhteistyössä.

Tutkimuksen menetelmään liittyen triangulaatio tarkoittaa saman tutkittavan ilmiön lähestymistä usealla eri tavalla. Samalla metodilla voidaan tutkia useita samaan ilmiöön liittyviä tapauksia tai useilla metodeilla voidaan tutkia samaa kohdetta. (Brannen, 1995.) Tutkittavaa ongelmaa tulisi tarkastella mahdollisimman monesta näkökulmasta luotettavan tuloksen saamiseksi. Toisaalta triangulaatiota on kritisoitu tutkimuksen leveyden ja syvyyden lisäämisestä ilman varsinaisen paikkaansa pitävyyden kohentamista. (Tuomi & Sarajärvi, 2013.) Useamman metodin käytön täytyy aina olla perusteltua. Käyttämällä erilaisia analyysitapoja tämä tutkimus antaa kattavamman käsityksen siitä, millä tavalla oppikirjat ohjailevat yhtäsuuruuskäsitteen muodostumista. Kategorioihin sijoitettujen tehtävien kvantifiointi on perusteltua jo aineiston koon kannalta, ja lisäksi se tuo analyysiin objektiivisuutta. Tulosten tarkastelu aiemman tutkimuksen valossa taas tekee tutkimuksesta kokonaisvaltaisempaa.

Eettisyys koskee rehellisyyttä, huolellisuutta tutkimustyössä, avoimuutta ja muiden tutkijoiden työn kunnioittamista (Hirvonen, 2006). Tässä tutkimuksessa tutkijatriangulaatio edistää huolellista työtä ja avoimuutta. Aidon yhteistyön kautta yhden tutkijan subjektiiviset näkemykset eivät saa liikaa painoarvoa. Tutkimusta tehtäessä on huolehdittava, että esimerkiksi tutkimussuunnitelma, tutkimusasetelma ja raportointi ovat hyvin tehtyjä (Tuomi & Sarajärvi, 2013). Huono suunnittelu voi vaikuttaa jopa tuloksiin ja niiden kelpoisuuteen (Creswell, 2005). Tämän tutkimuksen metodia kokeiltiin pienellä aineistolla, minkä jälkeen sitä muokattiin saatujen kokemusten perusteella toimivampaan suuntaan.

Tutkimusta ohjaa eettinen sitoutuneisuus silloin, kun kyse on hyvin tehdystä työstä. Tällöin kyse ei ole vain luotettavuus- ja arviointikriteereistä. Oleellista on myös argumentaation tärkeys ja lähteiden käyttö sekä alkuperä. (Tuomi & Sarajärvi, 2013.) Tässä tutkimuksessa lähteitä on pyritty käyttämään huolellisesti ja kattavasti esitettyjen argumenttien ja johtopäätösten tukena. Tutkijan tulee antaa lukijalle riittävästi tietoa selkeällä tavalla raportissaan tutkimuksen tekotavasta, jotta lukija voi arvioida tutkimuksen tuloksia (Tuomi & Sarajärvi, 2013). Hyvinkään tehty tutkimus ei pääse oikeuksiinsa, jos siitä tehty kirjallinen työ on heikko. Tutkijoiden tulee tehdä läpinäkyviksi toimintamenetelmiensä ja tulkintatapojensa taustalla olevat näkemykset.

7 Pohdinta

Tutkimuksen tarkoitus on selvittää, millaisiin kategorioihin oppikirjojen yhtälöitä sisältävät tehtävät voidaan jakaa. Lisäksi tarkastelemme, miten tehtävät jakautuvat muodostuneisiin kategorioihin valituissa oppikirjasarjoissa. Oppikirjasarjojen välisten eroavaisuuksien lisäksi tutkimuksessa havainnoidaan vuosiluokkien välillä tapahtuvia muutoksia. Saaduista tuloksista tehtiin havaintoja ja muodostettiin johtopäätöksiä aikaisempien tutkimusten perusteella. Suomalaista tutkimusta yhtäsuuruuden käsitteen opettamisesta on hyvin suppeasti, vaikka aiheena se on oleellinen matematiikan opetuksen kannalta.

Yhtäsuuruuden käsitteeseen ei vaikuteta oppikirjoissa ja opetussuunnitelmissa kiinnitettävän riittävästi huomiota, vaikka useat tutkimustulokset osoittavat sen tärkeyden. Algebraan siirryttäessä virheellinen käsitys yhtäsuuruudesta aiheuttaa ristiriitoja vanhojen ja uusien tietorakenteiden välille. Yhtäsuuruuden käsitteen väärin ymmärtäminen voi pahimmillaan vaikuttaa oppilaan tekemiin koulutusvalintoihin ja sitä kautta myöhempään uravalintaan. Yläkoulun matematiikan opetuksessa algebralla on merkittävä rooli ja mikäli oppilaan virheellinen käsitys yhtäsuuruudesta vaikeuttaa oppilaan matematiikan opiskelua huomattavasti, voi hän kokea olevansa yleisesti taitamaton matematiikassa. Näin ollen jatkaessaan toisen asteen opintoihin opiskelija voi pyrkiä välttelemään matematiikkaa valinnoissaan. Matematiikan pitkä oppimäärä voi olla edellytyksenä esimerkiksi teknisten alojen korkeakoulutukseen pääsemiseen ja opinnoissa etenemiseen. Tästä taas on seurauksena tiettyjen uramahdollisuuksien karsiutuminen.

Tutkimuksessa oppikirjojen yhtälöitä sisältävät tehtävät muodostivat kaikkiaan kahdeksan eri kategoriaa. Näistä kategorioista kaksi ensimmäistä ohjaavat aikaisempien tutkimustulosten valossa operationaalisen käsityksen muodostumiseen. Viiteen seuraavaan kategoriaan kuuluvien tehtävien sisältämät yhtälöt taas ovat tyypillisestä poikkeavassa muodossa, eikä niihin sovellu virheellinen tulkinta yhtäsuuruudesta käskynä toteuttaa annettu operaatio ja ilmoittaa vastaus yhtäsuuruusmerkin jälkeen. Näistä viidestä kategoriasta etenkin IV-, V- ja VI-kategorioihin kuuluvien tehtävien sisältämien yhtälöiden on aikaisemmissa tutkimuksissa tiedostettu kehittävän relationaalista käsitystä yhtäsuuruudesta. Tarve muiden kategorioiden, joissa yhtälöt ovat epästandardissa muodossa, luomiseen nousi aineistosta.

Oppikirja-analyysista saatujen tulosten mukaan Tuhattaituri-, Kymppi- ja Ykaakoo -kirjasarjojen tehtävien sisältämistä yhtälöistä huomattavan suuri osa on standardissa muodossa. I-kategorian tehtävien sisältämät yhtälöt ovat muodoltaan yksipuolisia ja niiden ratkaiseminen on hyvin mekaanista. Vaikka II-kategoriaan kuuluvien tehtävien sisältämät yhtälöt ovat muodoltaan samoja, niihin liittyvät tehtävänannot ovat vaihtelevampia ja niiden ratkaiseminen edellyttää monimutkaisempaa ajattelua.

Kirjasarjojen välillä on selkeitä eroavaisuuksia tehtävien monipuolisuudessa. Kympissä tehtävät sijoittuvat pääosin kahteen ensimmäiseen kategoriaan. IV-, V- ja VI-kategoriat muodostuvat useassa sarjan oppikirjassa vain muutamasta tehtävästä. Kympissä tutkimuksessa huomioitujen tehtävien määrä on selkeästi suurin, ja siihen rinnastettuna näiden kategorioiden sisältävien tehtävien määrät ovat todella pieniä. Yykaakoossa ja Tuhattaiturissa I- ja II-kategoria ovat myös kaikkien oppikirjojen kaksi suurinta kategoriaa, mutta muiden kategorioiden tehtävämäärät pääsevät satunnaisesti lähelle niitä.

Vuosiluokkien välillä tapahtuvia muutoksia tarkasteltaessa oppikirjojen välillä ilmenee selkeitä yhteneväisyyksiä. Tarkemmin määriteltynä tarkastelun kohteena on, miten standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien prosentuaaliset osuudet vaihtelevat vuosiluokkien välillä. Standardissa muodossa olevia yhtälöitä sisältäviä tehtäviä on ensimmäisessä kolmessa oppikirjassa huomattavan paljon. Kympissä tehtävien prosentuaaliset osuudet hipovat sataa ensimmäisessä kolmessa oppikirjassa. Tuhattaiturissa ja Yykaakoossa osuudet ovat myös suuret, mutta selkeästi Kymppiä pienemmät. Yksipuolinen standardissa muodossa olevien yhtälöiden kohtaaminen voi johdatella oppilasta virheellisen yhtäsuuruuskäsityksen muodostamiseen. Mekaaninen laskutoimitusten toistuva harjoittelu korostaa operationaalisuutta, joka helposti yhdistetään myös yhtäsuuruusmerkkiin.

Standardissa muodossa olevia yhtälöitä sisältävien tehtävien osuudet laskevat luokka-asteen kasvaessa – epästandardissa muodossa olevia yhtälöitä sisältävien tehtävien osuudet puolestaan kasvavat. Totutusta muodosta poikkeavien yhtälöiden kohtaaminen auttaa oppilasta tiedostamaan omat yhtäsuuruuteen liittyvät käsityksensä ja tarvittaessa myös kyseenalaistamaan niitä. Tutkimuksessa tarkastellaan myös standardeja ja epästandardeja yhtälöitä sekaisin sisältävien tehtävien osuuksia eri oppikirjoissa. Tällaisia tehtäviä on valituissa 1.–3. vuosiluokkien oppikirjoissa yleisesti vähän. Niiden määrä laskee ensimmäisten lukukausien aikana, mutta kasvaa sen jälkeen. Tuhattaiturissa tällaisten tehtävien osuus on alimmillaankin suurempi kuin se on Kympissä ylimmillään. Yykaakoo sijoittuu kokonaisuutta tarkasteltaessa näiden kahden kirjasarjan väliin. Erilaisten yhtälöiden kohtaaminen tehtävätasolla on erityisen tärkeää, jotta yhtälöiden ratkaisu ei muutu mekaaniseksi.

Tämän tutkimuksen tekeminen on ennen kaikkea opettanut suhtautumaan oppikirjoihin kriittisesti. Kaikki niihin painettu ei aina ole ehdottomasti oikein tai perusteltua. Matematiikan oppikirjojen lisäksi tämä pätee myös muiden oppiaineiden kirjoihin ja opettajan oppaisiin. Opettajan tulisi pyrkiä opetuksessaan ottamaan huomioon kaikkein ensimmäisenä opetussuunnitelma, jonka pohjalta opetus suunnitellaan ja toteutetaan. Oppikirja ja sen opettajan opas on vain yksi väline, jota opetuksessa voi hyödyntää parhaaksi näkemällään tavalla. Oppikirjan tehtävien teettäminen kannesta kanteen voi olla oppilaille hyvin raskasta ilman erityisiä vaikeuksiakin. Lisäksi tällainen menettely ei takaa, että oppilas saavuttaa opetussuunnitelmassa määritellyt tavoitteet. Tämän tutkimuksen mukaan oppikirjat eivät esimerkiksi tarjoa riittävän monipuolisia yhtälörakenteita oppilaan yhtäsuuruuskäsityksen muodostumisen tueksi. Voidaankin kysyä, onko oppilaalle kehittävämpää työstää lukuvuoden aikana jopa satoja samankaltaisia tehtäviä omillaan vai hieman pienempi määrä vaihtelevia tehtäviä esimerkiksi toiminnallisesti tai yhteisöllisesti.

Tutkimukseen ei saatu uuteen opetussuunnitelmaan päivitettyjä oppikirjoja, sillä kustantajat päivittävät oppikirjansa portaittain. Oppikirjat ovat siis vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaisia. Käytimme kyseistä opetussuunnitelmaa kandidaatin tutkielmassamme, eikä tietoja uuteen, vuonna 2016 käyttöön otettavaan, opetussuunnitelmaan päivittäessä noussut esiin merkittäviä eroja yhtäsuuruutta koskien. Tämän myötä tutkimuksemme on ajankohtainen ja sovellettavissa, sillä näiltä osin oppikirjat eivät luultavasti muutu kovin merkittävästi.

Tutkimuksessa haasteita tuotti sopivan kategoriajaon luominen. Teimme vuosi sitten aineistonkeruusta pienen pilotin Kvalitatiivinen tutkimus II -tutkimuskurssille ja kokeilimme sitä varten luomaamme kategoriajakoa. Pilotti osoittautui hyödylliseksi, sillä totesimme laatimamme kategoriajaon olevan hyvin puutteellinen. Päädyimmekin tätä tutkimusta tehdessä aloittamaan alusta. Pääjako standardeihin ja epästandardeihin nousi aiemmasta tutkimuksesta, kun taas niiden alle muodostuneet kategoriat muovattiin aineistosta nousseiden tarpeiden mukaan. Prosessi oli hidas ja kategorioiden määritelmien hiominen jatkui pitkälle aineiston keräämiseen, mutta tällä tavalla luotu kategoriajako osoittautui toimivaksi. Luokittelun aikana käydyt keskustelut kategorioista ja niiden määritelmistä olivat merkittävässä asemassa toimivan jaottelun luomisessa. Kahden tutkijan välinen yhteistyö antaa tutkimukselle paljon: molempien toiminta on jatkuvasti tarkastelun alla, jolloin valitut toimintatavat ja tehdyt johtopäätökset ovat pääsääntöisesti hyvin perusteltuja.

Lähteet

Asikainen, K., Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J.(2011). Tuhattaituri 2a: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2012). Tuhattaituri 3a: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Booth, J. L. & Davenport, J. L. (2013) The Role of Problem Representation and Feature Knowledge in Algebraic Equation-Solving. The Journal of Mathematical Behavior 33(3), 415–423. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.04.003

Brannen, J. (1995) Combining qualitative and quantitative approaches: an overview. Teoksessa Mixing Methods: Qualitative and Quantitative Research. Aldershot: Avebury.

Creswell, J. W., (2005) Educational Research: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research. New Jersey: Pearson Education Inc.

Dewey, J. (1938/1988). Experience and Education. Teoksessa J. A. Boydston (toim.), The Later Works, 1925–1953, John Dewey, Volume 13: 1938–1939 (s. 1–62). Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press.

Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. Haettu osoitteesta http://ncisla.wceruw.org/publications/articles/AlgebraNCTM.pdf

Freiman, V. & Lee, L. (2004) Tracking Primary Students' Understanding of the Equality Sign. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 415–422. Haettu osoitteesta http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489747.pdf

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.

Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J. (2012). Tuhattaituri 1a: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L., Sipilä, A-R., Soini, V. & Väistö, M. (2014). Ykkaakoo 3B: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus.

Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L. & Väistö, M. (2014). Ykkaakoo 1B: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus.

Hattikudur, S. & Alibali, M. W. (2010) Learning about the Equal Sign: Does Comparing with Inequality Symbols Help? Journal of Experimental Child Psychology 107(1), 15–30. doi:10.1016/j.jecp.2010.03.004

Haverty, L. A., Koedinger, K. R., Klahr, D. & Alibali, M., W. (2000) Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not so Trivial Pursuit. Cognitive Science, 24(2), 249–292. doi:10.1016/S0364-0213(00)00019-7.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. Educational Studies in Mathematics, 27, 59–78. doi:10.1007/BF01284528.

Hirvonen, A. (2006) Eettisesti hyvä tutkimus. Teoksessa Etiikkaa ihmistieteille. Helsinki: Hakapaino Oy.

Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M. (2014). Ykkaakoo 1A: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus Oy.

Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M. (2014). Ykkaakoo 3A: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus Oy.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. & Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School. Journal for Research in Mathematics Education, 38(3), 258–288. Haettu osoitteesta http://www.nctm.org/publications/toc.aspx?jrnl=jrme

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2010) Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Helsinki: Edita Prima Oy.

Kaput, J. J. (1998). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 curriculum. Teoksessa The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium. Washington, DC: The National Academies Press.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. Educational Studies in Mathematics, 12, 317–326. doi:10.1007/BF00311062

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M. & Stephens, A. C. (2008). The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. Mathematics Teaching in the Middle School, 19(9), 514–519. Haettu osoitteesta http://www.nctm.org/publications/toc.aspx?jrnl=mtms

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. Journal for Research in Mathematics Education 2006, 37(4), 297–312. Haettu osoitteesta http://www.nctm.org/publications/toc.aspx?jrnl=jrme

Krippendorff, K. (2004). Content Analysis - An Introduction to Its Methodology. Thousand Oaks: Sage Publications.

Latopelto, O., Slunga, M. & Väistö, M. (2014) Ykkaakoo 2B: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus.

Mann, R. L. (2004). Balancing Act: The Truth behind the Equal Sign. Teaching Children Mathematics, 11(2), 65–69. Haettu osoitteesta http://www.nctm.org/publications/toc.aspx?jrnl=tcm

McNeil, N. M. (in press). Disadvantages of Teaching 2 + 2 = 4: Knowledge of Traditional Arithmetic Hinders Understanding of Mathematical Equivalence. Haettu osoitteesta http://www.apa.org/news/press/releases/2013/08/teaching-disadvantages.pdf

McNeil, N. M. (2007). U-Shaped Development in Math: 7-Year-Olds Outperform 9-Year Olds on Equivalence Problems. Developmental Psychology, 43(3), 687–695. doi:10.1037/0012-1649.43.3.687

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005a). Knowledge Change as a Function of Mathematics Experience: All Contexts are Not Created Equal. Journal of Cognition and Development, 6(2), 285–306. doi:10.1207/s15327647jcd0602_6

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005b). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Pattern Hinders Learning and Performance on Equations. Child Development, 76(4), 883–899. doi:10.111/j.1467-8624.2005.00884.x

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. Cognitive Science, 28, 451–466. doi:10.1207/s15516709cog2803_7

McNeil, N. M., Cheney, D. L., Matthews, P. G., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E. & Wheeler, M. C. (2012). It Pays to be Organized: Organizing Arithmetic Practice Around Equivalent Values Facilitates Understanding of Math Equivalence. Journal of Educational Psychology, 104(4), 1109–1121. doi:10.1037/a0028997

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. S., Hattikudur, S. & Krill, D. E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. Cognition and Instruction, 24(3), 367–385. doi:10.1207/s1532690xci2403_3

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994) Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Opetushallitus (2015). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Tampere: Juvenes Print - Suomen Yliopistopaino Oy.

Powell, S. R. (2012). Equations and the Equal Sign in Elementary Mathematics Textbooks. The Elementary School Journal, 112(4), s. 627–648. doi:10.1086/665009

Radford, L. (2015) Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues. The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, 209–227. Haettu osoitteesta http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-12688-3_15

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2012) Open Kymppi 1 syksy. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2013). Open Kymppi 2 syksy. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2013). Open Kymppi 2 kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2014). Open Kymppi 3 syksy. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2014). Open Kymppi 3 kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999) Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? Journal of Educational Psychology, 91(1), 175–189. Haettu osoitteesta http://psycnet.apa.org/?&fa=main.doiLanding&doi=10.1037/0022-0663.91.1.175

Saaranen-Kauppinen, A. & Puusniekka, A. (2009) Menetelmäopetuksen tietovaranto: Kvalitatiivisten menetelmien verkko-oppikirja. Tampere: Tampereen yliopisto.

Sáenz-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). Third Graders' Interpretations of Equality and the Equal Symbol. Educational Studies in Mathematics, 35(2), 153–187. Haettu osoitteesta http://link.springer.com/journal/10649/35/2/page/1

Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Murphy Gardiner, A. & Marum, T. (2013). Equation Structure and the Meaning of the Equal Sign: the Impact of Task Selection in Eliciting Elementary Students' Understandings. The Journal of Mathematical Behavior, 32, 173–182. doi:10.1016/j.jmathb.2013.02.001

Thompson, J. (toim.) (1993). Matematiikan käsikirja. Juva: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2013) Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Tynjälä, P. (2000). Oppiminen tiedon rakentamisena: Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Tampere: Tammer-Paino Oy. vai Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Willard, S. (toim.) (2004). General Topology. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

LIITE 1. Tutkimuksen aineistona olevat oppikirjat.

Tuhattaituri

Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J. (2012). Tuhattaituri 1a: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J. (2011). Tuhattaituri 1b: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Asikainen, K., Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J. (2011). Tuhattaituri 2a: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Asikainen, K., Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J. (2011). Tuhattaituri 2b: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2012). Tuhattaituri 3a: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2012). Tuhattaituri 3b: Opettajan opas. Keuruu: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kymppi

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2012) Open Kymppi 1 syksy. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2012). Open Kymppi 1 kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2013). Open Kymppi 2 syksy. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2013). Open Kymppi 2 kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2014). Open Kymppi 3 syksy. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2014). Open Kymppi 3 kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Ykaakoo

Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M. (2014). Ykaakoo 1A: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus Oy.

Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L. & Väistö, M. (2014). Ykaakoo 1B: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus.

Lehtola, M., Sipilä, A-R., Slunga, M. & Väistö, M. (2014) Ykaakoo 2A: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus Oy.

Latopelto, O., Slunga, M. & Väistö, M. (2014) Ykaakoo 2B: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus.

Hurmerinta, E., Sipilä, A-R. & Väistö, M. (2014). Ykaakoo 3A: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus Oy.

Hartikainen, S., Hurmerinta, E., Häggblom, L., Sipilä, A-R., Soini, V. & Väistö, M. (2014). Ykaakoo 3B: Opettajan opas. Helsinki: Edukustannus.

LIITE 2. Tutkimuksen aineistona olevat tehtävät luokiteltuina kategorioihin.

KAT	TUHATTAITURI 1A
I	10/2, 10/K2, 11/4, 11/K2, 11/7, 12/4, 12/K2, 12/7, 13/1, 13/K1, 13/K2, 13/3, 14/K2, 14/4, 15/1, 15/3, 15/K2, 15/5, 16/1, 16/K1, 16/K2, 16/2, 16/3, 17/K2, 18/2, 19/3, 19/4, 19/5, s.80/2, s.81/4, 20/4, 20/K2, 20/8, 21/4, 21/K2, 21/8, 22/3, 22/K2, 23/2, 23/K2, 24/2, 24/K1, 25/1*, 25/2*, 25/K1*, 25/K2*, 26/4, 26/K2, 26/8, 27/K1*, 27/K2, 27/6, 28/2, 28/K2, 28/4, 29/1, 29/2, 29/K1, 29/K2, 29/4, 30/2*, 30/4, 30/K1, 30/5, 31/2, 31/3*, s.128/2, 32/4, 32/K2, 32/7, 33/4, 34/1, 34/3, 34/K1, 34/K2, 35/K2, 35/4, 39/4, 40/3*, 40/K1*, 41/3, 41/K1, 42/3, 42/K2, 42/6, 43/3, 43/K2, 43/4, 44/1, 44/3, 44/K2, 44/4, 45/K1, 45/3, 46/2*, s.188/1, s.189/4, 47/K2, 48/1, 48/K1, 48/5 >> 101 kpl
II	10/1, 10/K1, 10/3, 10/5, 11/2, 11/8**, 11/9, 12/2, 12/8**, 12/9*, 13/2, 13/5**, 13/6*, 14/2, 14/K1, 15/2, 15/K1, 15/4, 17/2, 17/K1, 17/3, 17/4*, 18/1, 18/3*, 18/K1, 18/K2, 18/4, 18/5, 19/2, 19/6, s.81/3*, 20/2, 20/10*, 20/11*, 21/2, 21/10, 21/11*, 22/1, 22/k1, 23/1, 23/K1, 24/1, 24/3, 24/4, 25/1*, 25/2*, 25/K1*, 25/K2*, 25/3, 25/4, 26/2, 26/10*, 26/11*, 27/1, 27/K1*, 27/7**, 28/1, 28/3*, 28/K1, 28/5, 29/3*, 29/5, 30/2*, 30/3, 30/6**, 30/7*, 31/3*, 31/4*, 31/5, 32/2, 33/2, 34/4, 36/1, 36/3, 36/K2, 36/4, 37/1, 37/2, 37/K1, 37/3, 37/4, 37/5, 38/1, 38/2, 38/3, 38/K1, 39/5, 39/6, s.161/4, 40/2, 40/3*, 40/K1*, 40/5, 40/6**, 41/2, 41/5, 41/6, 42/7*, 43/1, 43/K1, 44/2, 44/K1, 46/2*, 46/4, 47/5 >> 105 kpl
III	
IV	11/8**, 12/8**, 12/9*, 13/5**, 13/6*, 17/4*, 18/3*, s.81/3*, 21/11*, 27/7**, 28/3*, 29/3*, 30/6**, 31/4*, s.160/3*, 40/6**, 46/3* >> 17 kpl
V	11/8**, 12/8**, 13/5**, 16/5, 20/10*, 20/11*, 26/10*, 26/11*, 27/7**, 30/6**, 30/7*, 36/5, s.160/3*, 40/6**, 42/7*, 46/3*, 47/6 >> 17 kpl
VI	8/2, 8/3, 8/K1, 8/K2, 8/4, 8/5, 9/5, 9/6, s.40/2
VII	
VIII	15/6, 16/6, 28/6, 29/6, 34/5, 35/3, 43/5, 44/5 >> 8 kpl

KAT	TUHATTAITURI 1B
I	1/3*, 1/K1*, 1/5, 2/2*, 2/K1*, 2/4, 3/2*, 3/K1*, 3/4, 4/2*, 4/K1*, 4/4, 5/K2*, 5/6, 6/K2*, 6/5, 8/K2, 9/K1*, 10/2, 10/3, 10/K1*, 11/3, 11/4*, s.49/3*, 13/3, 13/K2, 14/1, 14/2, 14/3, 14/K2, 14/5, 14/6, 15/1, 15/2, 15/3, 15/K2, 15/4, 15/5, 16/1, 16/2, 16/3, 16/K2, 16/4, 16/5, 17/1, 17/2, 17/K1, 17/K2, 17/3, 18/2, 18/K2, 19/1, 19/K2, 19/3, 20/2, 20/K2, 21/1, 21/2, 21/K2, 21/4, 22/2, 22/4, s.92/1, s.93/4, 23/1, 23/3, 23/4, 23/K1, 23/K2, 23/5, 24/1, 24/2, 24/3, 24/K1, 25/1, 25/2, 25/3, 25/K1, 25/5, 26/1, 26/2, 26/3, 26/K1, 26/4, 27/2, 27/K2, 27/4, 28/K1, 28/3, 29/1, 29/3, 29/K1, 29/4, 30/1*, 30/2, 30/K1, 30/5, 31/1, 31/2, 31/5, 32/1, 32/2, 32/3*, 32/4, s.133/4, 33/5, 34/4, 35/K2, 35/5, 36/8, 37/6, 38/K2, 38/4, 39/K2, 40/6, 41/3, 41/K1*, 41/4, 42/K2, 43/2, 43/4, 45/5, 47/3, 47/K2, 48/K1, 49/K1, 50/2, s.204/2, s.205/6, 51/4, 51/K1, 51/5, 52/3, 52/K1 >> 134 kpl

II	1/3*, 1/K1*, 2/2*, 2/K1*, 3/2*, 3/K1*, 4/2*, 4/K1*, 5/K2*, 6/K2*, 7/4, 8/3, 9/K1*, 9/5, 10/K1*, 11/4*, s.49/3*, 12/1, 12/K1, 12/2, 12/4, 12/5, 13/5, 13/6, 13/7, 14/K1, 14/8, 15/K1, 15/8*, 16/K1, 16/7, 17/5, 18/1, 18/K1, 18/6, 19/2, 19/K1, 19/6*, 20/1, 20/K1, 20/6, 21/3, 21/K1, 21/5*, 21/7, 21/8**, 22/5, 23/2, 24/6*, 24/8, 27/1, 27/K1, 27/6, 29/7, 30/1*, 30/3, 30/8, 31/3, 31/K1, 32/3*, 32/5, 41/K1*, 41/6, 42/2, 42/4*, 43/1, 43/K1, 48/K2, 48/5, 49/1, 49/4, 51/2*, 52/6** >> 73 kpl
III	
IV	15/8*, 18/3, 19/6*, 21/5*, 21/8**, 42/4*, 51/2*, 52/6** >> 8 kpl
V	21/8**, 24/6*, 38/6, 52/6** >> 4 kpl
VI	46/1, 50/5
VII	
VIII	29/6, 30/7 >> 2 kpl

KAT	TUHATTAITURI 2A
I	1/2, 1/3, 1/4, 1/K1, 1/6, 2/1, 2/2, 2/3, 2/K1, 2/5, 4/K2, 4/4, 5/1, 5/2, 5/3, 5/K1, 5/K2, 5/4, 6/1, 6/2, 6/3, 6/K1, 6/K2, 7/1, 7/2, 7/3, 7/K1, 7/K2, 7/4, 8/1, 8/2, 8/3, 8/K1, 8/K2, 9/2, 9/4, 9/K2, 9/6, 10/4, s.45/3, 11/3, 11/K2, 12/1, 12/2, 12/3, 12/K1, 12/K2, 12/4, 13/1, 13/2, 13/3, 13/K1, 13/7, 14/3, 15/1, 15/2, 15/K1, 15/4, 16/1, 16/2, 16/3, 16/K1, 16/K2, 16/4, 16/5, 17/1, 17/2, 17/K1, 18/1, 18/2, 18/K1, 19/3, 19/4, 19/5, 19/6, s.80/2, s.80/3, s.81/5*, 20/3, 23/4, 24/3, 25/3, 26/3, s.121/3, 30/K2, 31/1, 31/4*, 31/K2, 32/K1, 32/K2, 33/2, 33/K2, 34/1, 34/4*, 34/K2, 35/1, 35/4*, 35/K2, 36/2, 36/4, 36/K1, 36/5, 37/2, 37/3*, 37/K2, 38/3, s.156/1, 39/K2, 39/4, 40/K1*, 41/K2, 41/3, 42/K2*, 43/K2*, 44/4, 44/K2*, s.184/1*, s.184/3, 46/3, 46/K2, 46/6, 48/1, 48/3, 48/K1, 8/7* >> 125 kpl
II	1/5, 2/4, 5/5, 6/7**, 7/5, 8/7*, 9/1, 9/3, 9/K1, 10/5, 11/1, 11/2, 11/K1, 11/5**, 12/5*, 13/4, 15/3, 15/K2, 17/3, 17/K2, 18/3, 18/K2, 18/7*, 19/2, 19/7, s.80/1, s.81/5*, 24/6, 27/5, 30/1, 30/K1, 30/5, 31/3, 31/4*, 31/8, 31/9, 32/2, 33/1, 33/3, 33/K1, 33/4, 33/7**, 33/8, 34/3, 34/4*, 34/8, 34/9, 35/3, 35/4*, 35/8, 35/9, 36/7*, 36/8, 37/1, 37/3*, 37/K1, 37/5, 37/6, 37/7, 38/1, 38/4, 38/5, 38/6, s.157/5*, 40/K1*, 40/6, 42/K2*, 43/K2*, 44/K2*, 44/6, 44/8, 45/5, s.184/1*, 46/4, 48/2, 48/8, 48/9 >> 77 kpl
III	30/2, 31/5, 34/5, 35/5, 36/1, 36/3, 38/2 >> 7 kpl
IV	6/6, 6/7**, 8/6*, 11/5**, 33/7** >> 5 kpl
V	6/7**, 8/6*, 11/5**, 12/5*, 18/7*, 33/7**, 36/7*, s.157/5*, 44/9, 45/6 >> 10 kpl
VI	4/K1, 4/3 >> 2 kpl
VII	
VIII	43/5 >> 1 kpl

KAT	TUHATTAITURI 2B
I	1/K2, 2/K2, 3/K2, 5/K2, 6/K2, 6/7, 8/2, 8/K2*, 9/1, 9/4*, 9/K2, 10/K1*, 11/1, 11/4*, 11/K1, 12/K2, 13/2, 13/K2*, 14/4, s.60/1, 16/6, 19/K2, 19/5, 20/1, 20/2, 20/3, 20/4, 20/K1, 20/K2, 20/5, 20/6, 21/1, 21/2*, 21/3, 21/K1, 21/K2, 21/4, 21/5, 22/1, 22/2*, 22/3, 22/K1, 22/K2, 22/4, 22/5, 23/1, 23/2, 23/3, 23/4, 23/K1, 23/K2, 23/6, 24/2, 24/K2, 25/2, 25/3, 25/4, 25/K1, 26/5, s.108/3, 27/K2, 27/5, 28/K2*, 29/K2*, 30/K2, 30/8, 32/K2, 33/K2, 34/K2, 34/5, 35/2, 35/K2, 36/2, s.148/2, 38/5, 41/5, 44/K2, 46/2, 46/K2, 50/2, 50/K2 >> 81 kpl
II	8/1, 8/3, 8/K2*, 8/6**, 8/7, 9/3, 9/4*, 9/7*, 9/8, 10/1, 10/2, 10/K1*, 11/3, 11/4*, 11/7*, 11/8, 12/2, 13/K2*, 13/5, 13/6, 14/1, 14/5, 14/6*, 14/7, s.61/5, 17/1, 17/3, 17/K1, 17/6, 18/6, 22/7, 24/3, 24/K1, 25/1, 25/7, 26/6, 28/K2*, 29/K2*, 30/5, 31/K2, 33/6*, 35/1, 35/K1, 35/4, 36/4, 38/6, 43/4*, 43/K2, 43/7, 44/K1, 45/2*, 45/3, 45/K1, 45/K2, 45/7, 46/4, 46/K1, 46/7*, 48/1, 48/2, 48/K2, 48/6*, 48/7, 50/3, 50/K1, 50/7 >> 66 kpl
III	9/5, 11/5, 14/2, 21/2*, 22/2* >> 5 kpl
IV	8/6**, 15/1, 15/2, 15/K1, 15/K2, 16/1, 16/2, 16/K1, 16/K2, 17/K2, 26/3, 46/3*, 46/7*, 50/1 >> 14 kpl
V	8/6**, 9/7*, 11/7*, 14/6*, 28/8, 29/7, 33/6*, 48/6* >> 8 kpl
VI	18/1, 18/2, 24/1, 35/6
VII	43/2, 43/3, 43/4*, 43/K1, 45/2*, 46/3* >> 6 kpl
VIII	

KAT	TUHATTAITURI 3A
I	1/1, 1/3, 1/K2, 2/1, 2/3, 2/K1, 3/2, 3/K1, 4/2, 4/K1, 5/2, 5/K2, 7/K2, 7/4, 8/5, 9/5, 11/5, 12/5, 13/4, s.56/1, s.57/5, 14/1*, 15/2, 15/4*, 15/K2, 16/1, 16/3*, 17/2, 17/K2, 18/2*, 18/K2, 19/2, 19/K2, 19/5, 19/6, 20/1, 20/3, 20/K1, 20/6, 21/2, 21/K2, 22/2, 22/K2, 22/5, 23/2, 23/K1*, 23/7, 24/2, 24/K2, 24/6, 25/K1, 25/3, 26/1, 26/K2, 27/4*, s.112/2, 31/1, 31/K1, 32/K1, s.152/1, 38/5**, 39/5**, 40/1, 40/2*, 41/1*, 41/2*, 41/3, 41/K1*, 41/K2, 42/4, 43/1*, 43/2, 43/K1, 44/3, 44/K2, 44/4, 45/3, 46/1, 46/K1, 48/K1, 49/1, 49/2, 49/3*, 49/K1, 50/2*, 50/4, s.204/2, s.204/4 >> 88 kpl
II	1/4, 1/8*, 2/4, 2/K2, 3/3, 3/K2, 3/6, 4/3, 4/K2, 4/6, 6/4, 6/K2, 10/5, 13/8, 14/1*, 15/4*, 15/K3, 16/3*, 16/4, 16/K1, 16/K2, 16/6, 17/4, 17/K3, 17/8, 18/2*, 18/K1, 18/4, 19/4, 19/K3, 20/2, 20/K2, 21/5, 22/4*, 22/K3, 22/7, 23/3*, 23/K2, 24/4, 24/5, 24/K3, 24/9, 25/K2, 26/2, 26/5, 27/2, 27/3, 27/5, s.113/6, 28/4, 38/5**, 38/6, 39/5**, 40/2*, 40/3, 40/K1, 40/K2, 41/1*, 41/2*, 41/K1*, 41/6*, 42/2, 42/3, 42/K2, 43/1*, 43/3, 43/K2, 43/5*, 44/1, 44/2, 44/K1, 45/1, 45/2, 45/K1, 45/5*, 46/3, 46/K2, 46/5**, 47/5, 49/3*, 49/5*, 49/K2, 49/8, 50/2*, 50/6, s.204/3, s.205/6, 52/2*, 52/4 >>89 kpl
III	3/1, 4/1, 5/3, 14/2, 14/3, 14/4, 14/K1, 14/K2, 14/8, 22/4*, 22/8, 23/3*, 26/6, 28/1, 28/2, 28/3, 28/K1, 28/K2, 28/5, 29/1, 29/2, 29/K1, 30/1, 30/2, 30/K1, 31/2, 31/3,

	31/K2, 34/3, 37/2, 37/3, 37/4, s.152/3, 39/6, 47/1, 47/2, 47/3, 47/K1, 48/K2, 49/4, 49/5*, 50/5, s.205/5, 51/1, 51/K1, 52/2* >> 46 kpl
IV	1/5, 1/8*, 5/3, 5/K1, 6/2, 13/2, 18/1, 23/4, 23/K1*, 24/7, 27/4*, s.113/4, 38/5**, 39/5**, 43/5*, 45/5*, 46/5** >> 17 kpl
V	23/6, 41/6*, 46/5** >> 3 kpl
VI	6/1, 7/3 >> 2 kpl
VII	
VIII	20/5, 22/6, 31/5 >> 3 kpl

KAT	TUHATTAITURI 3B
I	1/K2, 1/7*, 3/K2, 3/6*, 4/K2, 5/7, 6/6, 7/7, 8/2*, 8/8, 19/3, 19/K2, 21/7, 23/K1, 23/K2, 27/2, 27/K2, 29/1*, 29/2*, 29/K1*, 30/1, 30/2*, 30/K1, 30/K2*, 32/7, 34/5, 36/6, 45/6, 49/5, 51/5, >> 30 kpl
II	1/7*, 1/8, 3/6*, 4/4**, 5/1, 5/3, 5/K2, 7/2*, 8/6**, s.45/4*, 9/K2*, 10/6**, 11/4, 22/4, 22/K2, 27/6*, 29/1*, 29/2*, 29/4, 29/K1*, 29/K2, 30/4, 31/4, 33/3, 36/7, 40/1, 40/3, 40/K1, 41/1, 41/2, 41/3, 41/K1, 42/2, 42/3*, 42/4*, 42/K1, 43/4, 43/5, s.176/2, 46/1*, 46/5*, 46/K2*, 47/2*, 47/5**, 48/K2, 50/3, 50/K2, 51/2, 52/2*, 52/7, 53/5, 55/5* >> 52kpl
III	7/1*, 7/4*, 8/K2*, 9/K1*, 10/4*, 19/6, 27/3, 30/3, 30/K2*, 33/5, 40/2, 40/5, 41/5, 42/3*, 42/4*, 47/4*, 47/5**, 47/K2*, 48/K1*, 54/K1*, 55/5* >> 21 kpl
IV	4/1, 4/4**, 6/3, 8/6**, 10/6**, 19/2, 19/K1, 32/1 >> 8 kpl
V	4/4**, 6/K2, 7/1*, 7/2*, 7/3, 7/4*, 7/K1, 7/K2, 8/1, 8/2*, 8/3, 8/4, 8/K1, 8/K2*, 8/K3, 8/6**, 9/K1*, 9/K2*, 9/4, 10/4*, 10/5, 10/6**, 10/7, s.45/4*, 27/6* >> 25 kpl
VI	
VII	30/2*, 45/1, 45/2, 45/4, 45/K1, 45/K2, 46/1*, 46/2, 46/3, 46/4, 46/5*, 46/K1, 46/K2*, 47/2*, 47/3, 47/4*, 47/5**, 47/K1, 47/K2*, 47/9, 48/1, 48/K1*, 49/2, 49/K2, 50/1, 51/1, 51/3, 51/K1, 51/K2, 52/1, 52/2*, 52/4, 52/5, 54/2, 54/K1*, 54/5 >> 36 kpl
VIII	8/5, s.45/6, 27/5 >> 3 kpl

KAT	KYMPPI 1 SYKSY
I	11/3, 11/K2, 12/1*, 12/3, 12/K2, 13/K2, 14/1, 14/3, 14/4*, 14/K2, 15/1*, 15/3, 15/K2, 16/1*, 16/2*, 16/3, 16/K2, 17/3, 17/4, 17/K2, 18/3, 18/K2, 20/1, s.83/K2, 21/3, 21/4, 21/K2, 22/1*, 22/3, 22/5, 22/K1*, 23/1*, 23/2*, 23/K1*, 24/3, 24/4, 24/K2, 25/1, 25/K2, 26/1, 26/2*, 26/K1, 26/K2, 27/3, 27/4, 27/5*, 27/7, 27/K2, 28/1*, 28/2, 28/3, 28/K1, 28/K2, 29/4, 29/K2, 30/2, 30/3, 30/5, 30/K2, 31/5*, 32/K2, 33/1*, s.135/3, 34/2*, 34/3, 34/K2, 35/1*, 35/3, 35/4, 35/K2, 36/1*, 36/2*,

	36/3, 36/5, 36/K2, 37/1*, 37/4, 37/K2, 39/1, 39/2, 39/K2*, 40/2, 40/4*, 40/5, 40/K2, 41/1, 41/2*, 41/3*, 41/K2, 42/1*, 42/3, 44/1*, s.179/3*, s.179/K2, 45/5, 46/1*, 46/4, 46/K2, 47/4, 47/K2 >> 100 kpl
II	11/1, 11/2, 11/4, 11/K1, 12/1*, 12/2, 12/K1, 14/2, 14/4*, 14/5, 14/K1, 15/1*, 15/2, 15/K1, 16/1*, 16/2*, 16/K1, 17/7, 18/1, 18/2, 18/K1, 19/1, 19/2, 19/3, 19/4, 19/5, 19/K1, 19/K2, 20/2, 20/3, 20/4, s.83/3, s.83/K1, 22/1*, 22/2, 22/4, 22/6*, 22/K1*, 23/1*, 23/2*, 23/3, 23/K1*, 24/7**, 25/2, 25/5, 25/K1, 26/2*, 27/5*, 28/1*, 28/6, 29/2, 30/1, 30/K1, 31/5*, 32/1, 32/2, 32/5, 32/K1, 33/1*, 33/2, 33/4, s.135/K1, s.135/K2*, 34/2*, 35/1*, 35/2, 35/K1, 36/1*, 36/2*, 36/K1, 37/1*, 37/2, 37/K1, 38/1, 38/2, 38/3, 38/K1, 38/K2, 39/5, 39/K2*, 40/4*, 41/2*, 41/3*, 42/1*, 42/4, 43/5, 44/1*, 44/3, 44/4, 44/5, s.179/3*, 45/1*, 45/4, 45/K2, 46/1*, 46/2, 46/5, 46/K1, 47/2, 47/K1 >> 100 kpl
III	
IV	22/6*, 24/7**, s.135/K2*, 45/1* >> 4 kpl
V	24/7**, 45/7 >> 2 kpl
VI	7/2, 7/3, 7/K2, 8/4, 31/2, 31/K1 >> 6 kpl
VII	
VIII	

KAT	KYMPPI 1 KEVÄT
I	1/4, 1/5, 1/7, 1/K2, 2/1, 2/3, 2/4, 2/6, 2/K2, 3/1*, 3/2*, 3/3, 3/K2, 4/3, 4/4, 4/5, 4/8, 4/K1, 4/K2, 5/3, 5/4, 5/5, 5/7, 5/K1, 5/K2, 6/1*, 6/2*, 6/3, 6/K2, 7/1*, 7/2*, 7/3, 7/4, 7/K2, 8/4, 8/5, 8/6, 8/K1, 8/K2, 9/4, 9/5, 9/6*, 9/K2, 10/3, 10/4, 10/K2, 11/1, s.47/K1, s.47/K2, 12/2, 12/3, 12/4, 12/6, 12/K1, 12/K2, 13/1, 13/2, 13/3, 13/4, 13/5, 13/K1, 14/1, 14/2*, 14/3, 14/4, 14/K1, 14/K2, 15/1, 15/2, 15/3, 15/5, 15/K1, 16/1, 16/2, 16/3, 16/4, 16/K1, 16/K2, 17/1*, 17/2*, 17/3, 17/K2, 18/3, 19/1, s.79/K2, 20/1, 20/2, 20/3, 20/4, 20/K1, 20/K2, 21/1, 21/2, 21/3, 21/K1, 22/1, 22/2, 22/3, 22/4, 22/K1, 23/1*, 23/3, 23/4, 23/K1, 23/K2, 24/1, 24/2, 24/3, 24/4, 24/6, 24/K1, 24/K2, 25/1*, 25/2*, 25/3, 25/4, 25/K2, 26/1*, 26/3, 26/K2, 27/1, s.111/K2, 28/3, 28/5, 29/3, 29/5, 30/3, 30/K2, 31/4, 31/K2, 32/3, 32/5, 32/K2, 33/3, 33/5, 33/K2, 34/4, 34/6, 34/K2, 35/1, s. 143/K3, 37/4, 39/4, 40/6, 40/K1, 40/K2, 41/K1, 41/K2, 42/1, 42/2, 42/K1, 43/1, 43/2, 43/3, 43/4*, 43/K1, 43/K2, 44/1, 44/2, 44/3, 44/4*, 44/K1, 44/K2, 45/1, 45/2, 45/4, 45/5, 45/7, 45/K1, 45/K2, 46/4, 47/1, s.191/K1, s.191/K2, 48/1, 48/2, 48/5, 48/K1, 48/K2, 49/1, 49/2, 49/4, 49/K1, 49/K2, 50/1, 50/3, 50/K1, 50/K2 >> 188 kpl
II	3/1*, 3/2*, 3/6, 3/K1, 6/1*, 6/2*, 6/6, 6/K1, 7/1*, 7/2*, 7/K1, 8/9, 9/6*, 10/1, 10/2, 10/K1, 11/5, 11/6, 12/5, 13/6, 13/7, 14/2*, 14/5, 16/5, 16/6, 17/1*, 17/2*, 17/5, 17/K1, 18/1, 18/2, 18/5, 18/K1, 19/2, 19/3, 19/4, s.79/K1, 20/5, 21/5, 23/1*, 23/2, 23/5, 24/5, 24/7, 25/1*, 25/2*, 25/5, 25/K1, 26/1*, 26/2,26/5, 26/K1, 27/2, 27/3, 27/4, s.111/K1, 43/4*, 44/4*, 44/5, 48/3, 48/6, 49/3, 49/5 >> 63kpl
III	
IV	

V	49/6, 50/5 >> 2 kpl
VI	
VII	
VIII	

KAT	KYMPPI 2 SYKSY
I	1/2, 1/3*, 1/4, 1/6, 1/K2, 2/1, 2/2, 2/3*, 2/4, 2/5, 2/K2, 3/1, 3/2, 3/3*, 3/4, 3/K2, 4/9, 4/10, 4/K3, 5/5, 5/K2, 6/5, 7/1, 7/2, 7/4, 7/5, 7/K2, 8/1, 8/2, 8/4, 8/K2, 9/1, 9/2, 9/3, 9/4, 9/K1, 9/K2, 10/5*, 10/6, 10/K3, 11/1, 11/2*, 11/3, 11/K2, 12/1, 12/2, 12/3, 12/K1, 12/K2, 13/5*, 13/6, 13/7, 13/K2,s.57/1, s.59/K3, 15/1*, 15/4*, 16/1*, 16/2, 16/3*, 16/4, 16/K2, 17/1, 17/6*, 17/7, 17/K2, 18/1*, 18/2, 18/3*, 18/4, 18/K2, 19/1*, 19/2, 19/3*, 19/4, 19/K2, 20/1, 20/2, 20/3, 20/K1, 20/K2, 21/1*, 21/K2, 22/1*, 22/2, 22/3, 22/K2, 23/1*, 23/8, 23/K2, 24/1*, 24/2*, 24/3*, 24/4, 24/5, 24/6*, 24/K3, 25/1*, 25/2, 25/3, 25/K2, 26/9, 26/10, 26/K3, 27/8, 27/K2, 28/1, 28/2, 28/6, 28/K2, s.117/1, s.119/K2, 30/4, 30/K2, 31/4, 31/K2, 32/1, 32/2, 32/3, 32/4, 32/5, 32/6, 32/7, 32/8, 32/9, 32/10, 32/K1, 32/K2, 33/1, 33/2, 33/7, 33/9, 33/K1, 33/K2, 34/3*, 34/4*, 34/5, 34/K2, 35/5, 35/7, 35/K2, 36/7, 36/K2, s.149/1, s.151/K2, 38/5, 38/K2, 39/4, 39/K2, 40/4, 40/K2, 41/5, 41/K2, 42/3, 42/K2, 44/4, 44/K2, s.183/K2, 46/1*, 46/3, 46/4, 46/K2, 47/1, 47/2, 47/7, 47/8, 47/K3, 48/1, 48/2, 48/7, 48/8, 48/K3, 49/1, 49/6, 49/7*, 49/8, 49/K2, yht. 177 kpl
II	1/3*, 1/K1, 2/3*, 2/7, 2/K1, 3/3*, 3/K1, 4/1, 4/2, 4/3,4/4, 4/5, 4/6, 4/7, 4/8, 4/K1, 4/K2, 8/3, 8/6, 8/K1, 9/6, 10/1, 10/2, 10/3, 10/4, 10/5*, 10/K1, 10/K2, 11/2*, 11/K1, 12/5 13/1, 13/2, 13/3, 13/4, 13/5*, 13/K1, 14/3, 14/4, 14/5, 14/6, s.59/K1, s.59/K2, 15/1*, 15/2, 15/3, 15/4*, 15/5, 15/K1, 16/1*, 16/3*, 16/K1, 17/2, 17/3, 17/4, 17/6*, 17/8, 17/K1, 18/1*, 18/3*, 18/K1, 19/1*, 19/3*, 19/K1, 20/5, 21/1*, 21/2, 21/3, 21/4, 21/5, 21/6, 21/7, 21/K1, 22/1*, 22/K1, 23/1*, 23/2, 23/3, 23/4, 23/5, 23/6, 23/7, 23/K1, 24/1*, 24/2*, 24/3*, 24/6*, 24/7, 24/K1, 24/K2, 25/1*, 25/5, 25/K1, 26/1, 26/2, 26/3, 26/4, 26/5, 26/6, 26/K1, 26/K2, 27/1, 27/2, 27/3, 27/4, 27/5, 27/6, 27/7, 27/9, 27/10, 27/K1, 27/K3, 28/3, 28/4, 28/5, 28/7, 28/8, 28/K1, 29/2, 29/3, 29/4, s.119/K1, 33/3, 33/4, 33/5, 33/6, 33/10, 34/3*, 34/4*, 34/K1, 36/8, 37/4, s.151/K1, 43/5, 43/K2, 46/1*, 46/2, 47/3, 47/4, 47/5, 47/6, 47/K1, 47/K2, 48/3, 48/4, 48/5, 48/6, 48/10, 48/K1, 48/K2, 49/2, 49/3, 49/4, 49/5, 49/7*, 49/9, 49/K1, yht. 167 kpl
III	
IV	
V	
VI	
VII	
VIII	16/5, 17/9, 18/5, 23/10, 26/12 yht. 5kpl
KAT	**KYMPPI 2 KEVÄT**
I	1/K2, 2/K2, 3/4, 6/1, 6/2, 6/3*, 6/4, 6/K1, 7/5, 7/6, 7/7, 7/K1, 8/1, 8/2, 8/7, 8/K1, 9/5, 9/6, 9/7, 9/9, 9/K3, 10/1, 10/3, 10/5, 10/K2, 11/2, 11/3, 11/K2, 12/4, s.51/K1, 13/3, 15/7, 17/7, 21/2, s.87/K2, 22/4, 24/4, 28/7, 29/7, s.131/K2,

	33/3, 33/5, 33/K3, 34/4, 34/K2, 35/4, 35/K2, 36/3, 36/5, 36/K2, 37/7, 38/3*, 39/7, 39/K4, 40/7, 41/6, 41/7, 41/K2, 42/2, 42/3, 42/4, 42/6, 42/K2, 43/2, 43/5, 43/K2, 43/K3, 44/2*, 44/5, 44/K2, s.183/K2, 46/1, 46/2, 46/3*, 46/4, 46/5, 46/K2, 47/1, 47/4, 47/K1, 47/K2, 50/3, 50/K2, 50/K3 >> 84 kpl
II	3/K1, 6/3*, 7/1, 7/2, 7/3, 7/4, 7/8, 7/10, 7/K2, 7/K3, 8/3, 8/4, 8/5, 8/6, 9/1, 9/2, 9/3, 9/4, 9/8, 9/10, 9/K1, 9/K2, 10/2, 10/4, 10/K1, 11/1, 11/K1, 12/5, 12/6, 12/7, s.51/K2, s.51/K3, 17/8*, 18/8, 19/8, 25/6, 25/8, 26/6, 27/8, 29/1, 29/2, 29/3, 29/4, 29/6, 29/K1, 29/K2, 38/3*, 39/5, 44/2*, 45/4, 45/5, 46/3*, 46/K1, 47/2, 47/3 >> 55 kpl
III	38/5*, 38/K2* >> 2 kpl
IV	17/8* >> 1 kpl
V	26/8 >> 1 kpl
VI	
VII	37/1, 37/2, 37/3, 37/4, 37/K1, 37/K2, 37/K3, 37/K4, 38/2, 38/5*, 38/K1, 38/K2*, 39/1, 39/2, 39/3, 39/4, 39/K1, 39/K2, 39/K3, 44/4, 45/2 >> 21kpl
VIII	46/6, 47/7 >> 2 kpl

KAT	**KYMPPI 3 SYKSY**
I	1/1, 1/2, 1/3, 1/K1, 2/1*, 2/2, 2/5, 2/6, 2/K1, 3/1, 3/2, 3/5, 3/6, 3/K1, 4/6, 4/K3, 5/2, 5/4, 5/K2, 7/3, 9/4, 11/1, 14/1, 14/K1, 15/1*, 16/3, 16/4*, 16/6, 16/K2, 17/3, 17/4*, 17/7, 17/K2, 18/1*, 18/5*, 18/6, 18/K2, 19/5, 20/12, 21/2, 21/4*, 22/5, 22/7, 22/K3, 23/2*, 23/4, 23/K2, 24/5, 24/7, 24/K3, 25/5, 25/7, 25/K1, 25/K2, 26/2*, 26/4, 26/K2, 27/4, 27/7, 27/K3, 28/2*, 28/3, 28/4, 28/K2, 29/2, 29/5, 29/K3, 30/1, s.123/K2, 31/1*, 31/2*, 31/3, 31/K1*, 32/1*, 32/2, 32/3, 32/4*, 32/K1*, 32/K2, 33/1*, 33/2*, 33/3*, 33/4, 33/K3, 34/3*, 34/4*, 34/5, 34/K3, 35/1, 35/2, 35/3*, 35/4, 35/K2, 36/3, 37/1*, 37/2*, 37/3, 37/K2, 38/5*, 38/7, 38/K3, 39/1*, 39/2*, 39/3, 39/4, 39/K2, 40/3, 40/K2, 41/1, 41/2, 41/4*, 41/K1, 41/K2, 42/1, 43/4, 43/K2, 44/7, 44/K2, 45/4, 45/K2, 48/5, 48/K2, s.199/K2, 50/1, 50/2, 50/K1, 50/K2, 52/1, 52/2, 52/K1 >> 130 kpl
II	2/1*, 2/3, 2/4, 2/K2, 2/K3, 3/3, 3/4, 3/K2, 3/K3, 4/2, 4/3, 4/4, 4/5, 4/8, 4/K1, 4/K2, 6/12, 7/5, 11/2, 11/3, 11/4, 11/8, 12/4, 14/4, 14/5, 15/1*, 15/2, 15/3, 15/4, 15/6, 15/K1, 16/4*, 16/5, 16/K1, 17/4*, 17/5, 17/8, 17/K1, 18/1*, 18/3, 18/4, 18/5*, 18/7, 18/K1, 19/6, 21/2, 21/4*, 22/8, 23/2*, 24/8, 25/8, 25/9, 26/2*, 26/6, 27/1, 27/2, 27/3, 27/6, 27/8, 27/K1, 27/K2, 28/2*, 28/5, 31/1*, 31/2*, 31/4, 31/K1*, 32/1*, 32/4*, 32/5, 32/6, 32/K1*, 33/1*, 33/2*, 33/3*, 33/5, 33/K1, 33/K2, 34/1, 34/2, 34/3*, 34/4*, 34/6, 34/K1, 34/K2, 35/3*, 35/6, 35/K1, 36/4, 37/1*, 37/2*, 37/7, 37/8, 38/1, 38/2, 38/3, 38/4, 38/5*, 38/6, 38/9, 38/K1, 38/K2, 39/1*, 39/2*, 39/5, 40/2, 41/4*, 42/3, 42/4, 42/5, 44/1*, 44/2*, 44/6*, 44/K1*, 46/K2, 46/4, 47/5, 47/K2, 49/1*, 50/3, 50/4, 52/5 >> 122 kpl
III	4/1, 19/1, 19/2, 19/3, 19/4, 19/K1, 19/K2, 20/1, 20/2, 20/3, 20/4, 20/5, 20/6, 20/7, 20/8, 20/9, 20/10, 20/K1, 20/K2, 20/K3, 20/K4, 21/3, 21/K1, 22/1, 22/2, 22/3, 22/4,

	22/K1, 22/K2, 23/3, 23/K1, 24/1, 24/2, 24/3, 24/4, 24/K1, 24/K2, 25/1, 25/2, 25/3, 25/4, 26/3, 26/K1, 28/K1, 29/1, 29/K1, 29/K2, 30/2, 30/3, 30/4, 30/5, s.123/K1, 36/1, 36/2, 36/K1, 37/K1, 39/K1, 40/1, 40/K1, 42/2, s.171/K1, 44/1*, 44/2*, 44/6*, 44/K1*, 49/1* >> 66 kpl
IV	5/3 >> 1 kpl
V	20/13, 35/5, 52/3 >> 3 kpl
VI	
VII	
VIII	50/7 >> 1 kpl

KAT	KYMPPI 3 KEVÄT
I	1/6, 1/K2, 2/4, 2/K3, 3/11, 3/K2, 4/5, 4/K2, 5/5, 5/K2, 6/3**, 6/K3, 10/1*, 10/5, 11/5, 14/4, 16/6, 16/7*, 16/K3, 17/6, 17/K3, 18/1, 18/2, 18/6, 18/K2, 19/K2, 20/5, 20/6, 27/1, s.111/K1, 30/1*, 30/2, 30/3*, 30/K2, 31/2, 31/3*, 31/5, 31/K2, 32/3*, 32/7, 33/4, 34/4, 35/5, 38/1, 38/K1, 39/4, 39/K2, 40/4, 40/K2, 41/4, 41/K2, 42/5, 42/K2, 43/4, 43/K2, 46/3, 46/K3, 47/3, 47/K3, s.199/K2, 50/1, 50/K1, 50/K2, 51/K2, 52/3, yht. 65kpl
II	6/3**, 6/4*, 6/6, 7/4, 7/5, 7/7, 8/6, 8/7, 8/K2, 10/1*, 10/K1, 15/1, 16/2, 16/3, 16/4, 16/5, 16/7*, 16/K1, 16/K2, 17/2, 17/3, 17/4, 17/5, 17/7, 17/K1, 17/K2, 18/3, 18/4, 18/7, 18/K1, 21/K1, 22/5, 25/5, 27/3, 27/4, 27/5, 28/1*, 28/6, 28/K2, 29/1*, 29/6, 29/K2, 30/3*, 30/K1, 31/3*, 31/4, 31/K1, 32/3*, 32/9, s.155/3, 44/2, 44/3, 44/4, 44/5, 44/6, 44/7, 50/2, 50/3, 51/2*, 51/3, 51/4, 51/7, 52/4, 52/5, yht. 64kpl
III	7/2*, 7/K2*, 16/1, 17/1, 28/1*, 28/2, 28/3, 28/4, 28/5, 28/K1, 29/1*, 29/2, 29/3, 29/4, 29/5, 29/K1, 30/1*, 30/4, 31/1, 31/6, 32/6, 32/8, 32/K3, 36/2, 36/3, 36/5, 37/4, 38/3, 38/4, 48/3, 48/4, 48/5, 48/6, 48/K1, 48/K2, 51/2*, 51/5, 51/K1, s.199/K1*, 12/2*, 12/K2*, 45/3*, 45/K3* yht. 43kpl
IV	20/4 yht. 1kpl
V	4/4 yht. 1kpl
VI	11/1, 11/K1, yht. 2kpl
VII	6/1, 6/2, 6/3**, 6/4*, 6/K1, 6/K2, 7/1, 7/2*, 7/K1, 7/K2*, 8/3, 8/4, 8/5, 12/1, 12/2*, 12/3, 12/K1, 12/K2*, 44/K1, 44/K2, 45/1, 45/2, 45/3*, 45/K1, 45/K2, 45/K3*, 46/1, 46/2, 46/K1, 46/K2, 47/1, 47/2, 47/K1, 47/K2, s.197/3, s.199/K1*, yht. 36kpl
VIII	

KAT	YYKAAKOO 1A
I	12/2*, 12/K1*, 13/3, 13/K1, 14/3*, 14/K1*, 14/K+1*, 15/3, 15/4, 15/K1,17/2,

	17/K1, 18/3, 18/K1, 19/K2, s.92/3, 21/4, 21/K2, 22/2*, 22/3*, 22/4, 22/K1, 23/K2, 24/1*, 24/2*, 24/3*, 24/K2, 25/2, 25/K2, 26/K+2, 28/1*, 28/2*, 28/3, 28/4, 28/K1, 28/K2, 28/L+1*, s.140/3 >> 38 kpl
II	12/1, 12/3, 12/L1, 12/K1*, 12/L+1, 13/2, 14/1, 14/2, 14/L1, 14/K1*, 14/L+1, 14/K+1*, 15/1, 15/K+1, 16/3, 17/1, 17/3, 17/6, 17/K2, 18/1, 18/2, 18/K2, 18/L+1, 18/K+1, s.92/4, 20/1, 20/2, 20/L1, 20/L2*, 20/K1, 20/L+1, 20/K+1, 21/1, 21/3, 21/L+1, 21/K+1*, 22/1, 22/2*, 22/3*, 23/L+1*, 23/K+1, 24/1*, 24/2*, 24/3*, 24/K1, 25/1, 25/3, 25/K1, 26/2, 26/K1, 27/1, 27/L1, 27/L2, 27/L3, 27/K1, 28/1*, 28/2*, 28/L+1*, 28/K+1, s.140/2 >> 60 kpl
III	
IV	12/2*, 14/3*, 20/L2*, 20/L+2*, 21/L1, 23/L+1* >> 6 kpl
V	13/K+1, 17/L2, 17/L+1, 17/K+1, 20/L+2*, 21/K+1*, 22/K+1 >> 7 kpl
VI	11/2, 11/3, 11/4, 11/5, 11/K1, 11/K+1 >> 6 kpl
VII	
VIII	17/L+2, 24/L+2 >> 2 kpl

KAT	**YYKAAKOO 1B**
I	5/L+1, 10/2*, 10/3, 10/K1, 11/1*, 11/4, 12/2, 12/3*, 12/K1, 13/1*, 13/2, 13/4, 13/L1*, 13/K1, 14/1*, 14/2, 14/4, 14/L1*, 14/K1, 15/2, s.88/2, 16/1*, 16/2, 16/3, 16/K1, 17/1*, 17/3, 17/K1, 18/2, 18/K1, 19/4, s.116/1, s.116/3, 23/K1, 25/K1, 25/K+1*, 31/2, 32/1*, 32/2, 32/3, 32/K1, 32/L+1*, 33/1*, 33/2, 33/3, 34/2, 34/3, 34/K1, 34/K+1*, s.188/4 >> 50 kpl
II	2/K+1, 10/1, 10/2*, 10/K+1, 11/1*, 11/2, 11/K1, 12/1, 12/3*, 12/K+1, 13/1*, 13/3, 13/L1*, 13/K+1, 14/1*, 14/3, 14/L1*, 14/K+1, 15/1, 15/3, s.88/1, s.88/3, 16/1*, 16/K+1, 17/1*, 17/2, 17/K+1, 18/1, 18/K+1, 19/1, 19/L+1, 20/1, 20/K1, 20/K+1, s.116/2, s.116/4, 23/1, 23/2, 23/L1, 23/K+1, 24/1, 24/2, 25/2, 25/L1, 25/K+1*, 26/K1, 26/L+1, 26/K+1, s.148/2, 30/L*, 31/1, 31/K1, 31/K+1, 32/1*, 32/L+1*, 32/K+1**, 33/1*, 33/K1, 33/K+1*, 34/1, 34/K+1* >> 61 kpl
III	
IV	30/L*, 31/3, 32/K+1**, 33/K+1* >> 4 kpl
V	24/K1, 24/K+1, 32/K+1** >> 3 kpl
VI	3/2, 3/K1 >> 2 kpl
VII	
VIII	

KAT	**YYKAAKOO 2A**
I	3/1, 3/2, 3/K1, 4/3, 5/1*, 5/2, 6/3*, 6/4, 7/2*, s.40/3, s.40/4, s.40/5, 10/2, 10/K1,

	11/3, 12/1, 12/2, 12/3, 12/K1, 13/2, 13/K1, 15/2*, s.84/2, s.84/3, 17/2*, 18/1*, 18/3*, 18/K1*, 20/1*, 20/3*, 20/L1, 20/K2, 21/K1*, 22/1*, 22/L1, 22/K2, 23/1, 23/K1*, 24/1*, 24/3*, 24/L1, 24/K2, 25/2, 25/4*, 25/K1*, 26/1*, 26/4*, 26/K2, 27/1*, 27/K2, 28/1, s.144/2, s.144/3, 35/3* >> 54kpl
II	3/3, 3/4, 3/K+1, 4/1*, 4/4, 4/L2, 4/L3, 4/L+1, 5/1*, 5/4, 5/K1, 5/K+1, 6/1, 6/3*, 6/5, 6/L1, 6/L+1, 7/2*, 7/3, 7/L1, 7/K1, 7/L+1, 7/K+1, s.37/1, 10/1, 10/3, 11/1, 11/K+1, 12/L2, 12/L+2, 12/K+1, 13/K+1, 14/1*, 14/3, 14/L1, 14/K1*, 14/L+1, 14/L+2*, 14/K+1, 15/1, 15/2*, 17/1, 17/2*, 17/K1, 18/1*, 18/2, 18/3*, 18/K1*, 19/1, 19/2, 19/3, 19/L2, 19/K1, 19/K+1, 20/1*, 20/3*, 20/K1, 21/1, 21/3, 21/4, 21/K1*, 21/K+1, 21/K+2, 22/1*, 22/3, 22/K1, 23/2, 23/3, 23/4, 23/K1*, 23/K+1, 24/1*, 24/3*, 24/K1, 24/L+1, 24/K+2, 25/3, 25/4*, 25/K1*, 26/1*, 26/4*, 26/L2, 26/K1, 26/K+1, 27/1*, 27/3, 27/K1, 27/K+2, 28/2, 28/3, 28/4, 28/K1, 28/K+1, 29/3, s.141/1, s.144/1, s.144/4, 35/3*, 35/L1, 35/L+1, 36/2 >> 101 kpl
III	4/1*, 4/2, 4/5, 4/6, 4/K1, 6/2, 6/6, 6/K1, 7/1, 7/4, 10/4, 11/2, 11/K1, 12/4, 12/K2, 12/K+2, 13/1, 15/K1 >> 18 kpl
IV	14/1*, 14/K1*, 29/2, 29/K1 >> 4 kpl
V	14/L+2*, 21/2, 24/K+1, 27/K+1 >> 4 kpl
VI	2/1, 2/K1 >> 2 kpl
VII	s.84/5 >> 1 kpl
VIII	

KAT	YYKAAKOO 2B
I	3/L1*, 7/5, 13/1*, 13/2, 13/3*, 13/6*, 13/8*, 13/K1*, 14/1*, 14/2*, 14/4*, 14/5*, 14/6*, 14/L1*, 14/K1*, 14/K2, 15/1*, 15/2, 15/3*, 15/K1*, 15/K2, 21/1, 21/3, 21/L1*, 28/1, 28/3, 28/K1, 29/1*, 29/2, 29/L1, 29/K1, 30/1*, 30/2, 30/K1, 31/1, 31/3, 31/K1, 32/1, 32/2, 32/3, 32/K1, 32/K2, 33/1, 33/2, 33/3, 33/K1, 33/K2, s.172/5, 40/L1* >> 49 kpl
II	3/L1*, 5/4, 6/4, 8/1, 10/3, 10/K1, 10/K+1, 12/L+1, s.62/1, s.63/1, 13/1*, 13/3*, 13/6*, 13/8*, 13/K1*, 14/1*, 14/2*, 14/4*, 14/5*, 14/6*, 14/L1*, 14/K1*, 14/L+1, 15/1*, 15/3*, 15/K1*, 15/L+1, 16/L1, 21/2, 21/4, 21/L1*, 21/K1, 21/L+1, 21/K+1, s.104/1, 23/4, 24/4, 24/5, 28/2, 28/4, 28/K2, 29/1*, 29/3, 29/K2, 29/K+1, 30/1*, 30/4, 30/K2, 30/K+1, 31/2, 31/5, 31/L1, 31/L2, 31/L3, 31/L4, 31/K2, 31/K+1, 32/4, 32/L2, 32/L+2, 33/K+1, 33/K+2, 40/L1*, 40/L+1 >> 64 kpl
III	
IV	13/4, 13/9, 14/3, 15/4, 28/K+1, 39/K+1 >> 6 kpl
V	16/L+1, 16/L+2, 16/K+1 >> 3 kpl

VI	
VII	6/1, 7/3, 7/4, 12/1, 12/2, 12/4, 12/K1, s.60/3, 14/7, 14/K+2, 36/1, 36/K1 >> 12 kpl
VIII	12/K+1 >> 1 kpl

KAT	YYKAAKOO 3A
I	1/K1, 4/1, 7/2, 7/3, 7/4, 7/L2*, 7/K1, 7/L+1, 8/K1, 9/3, 9/4*, 9/5, 9/K1*, 9/K2, 10/4*, 10/5, 10/K1*, 10/K2, 11/3, 11/4*, 11/5, 11/K2, 12/3, 12/4*, 12/5, 12/L1, 12/K2, 13/2*, 13/4, 13/5, 13/L1, 13/L+1*, 13/L+3*, s.69/2, s.69/4, 15/2, 15/K1, 16/2, 16/K1, 16/L+1, 17/2*, 17/4, 17/K1*, 18/K1*, 18/K+2, 19/L1, 20/1, 20/K1, 20/K+1, 21/3, 21/K1, s.107/3, 22/K2, 26/1, 26/2, 26/3, 26/K1, 26/K2, 29/1, 29/2, 29/3, 29/K2, 29/K3, 30/2, 30/K2, 30/K+1, 30/K+2, 31/2*, 31/K2, 31/L+1, s.173/1, 37/K2, 39/K2, 43/7, 43/K2 >> 75 kpl
II	1/3, 1/K+2, 3/5*, 3/L+2, 3/K+2, 4/L2, 4/L3, 4/K+1, 5/K+2, 6/2, 6/3, 6/5, 6/6, 6/L1, 6/L+2, 6/K+1, 6/K+2, 6/K+3, 6/K+4, s.35/2, 7/1, 7/6, 7/L2*, 7/L3, 7/K+1, 8/1, 8/L1, 8/L+2, 8/K+1, 9/2, 9/4*, 9/6, 9/K1*, 9/L+1, 9/K+1, 10/2, 10/4*, 10/6, 10/K1*, 11/2, 11/4*, 11/6, 11/7, 11/K1, 12/2, 12/4*, 12/6, 12/K1, 12/L+1, 13/L+1*, 13/L+3*, s.66/1, s.66/2, s.66/3, s.66/4, s.66/5, s.66/6, s.69/1, 14/1, 14/2, 14/3, 14/K1, 14/K+1, 15/1, 15/3, 15/K2, 15/K3, 15/K+1, 15/K+2, 16/1, 16/3, 16/4, 16/5, 16/6, 16/7, 16/L2, 16/L3, 16/K2, 16/K+1, 17/1, 17/3, 17/L1, 18/1, 18/3, 18/4, 18/K1*, 18/L+2, 19/1, 19/2, 19/4, 19/L2, 19/L+1, 19/K+1, 20/L1, 20/L2, 20/L+1, 20/K+2, 21/L1, 21/L2, 21/L+1, 21/K+1, s.104/1, s.104/2, s.104/3, s.104/4, s.104/5, s.104/6, s.107/1, s.107/2, s.107/4, 25/K1, 26/4, 26/5, 26/6, 26/7, 26/9, 26/K+1, 27/K+2, 28/3*, 28/4, 28/L+3, 28/K+3, 29/4, 29/5, 29/6, 29/7, 29/8, 29/K1, 29/K+1, 30/4, 30/L+2, 30/L+3, 30/L+4, 31/6, 31/9, 31/L1, 31/L2, 31/L3, 31/L4, s.170/4, s.171/2, 37/K+2, 39/K+2, 42/1, 42/L1, 43/8, 43/K+2, s.204/1, s.204/2, s.204/3 >> 150 kpl
III	1/4, 1/K2, 3/1, 3/2, 3/3, 3/5*, 3/K1, 3/K2, 4/2, 4/3, 4/4, 4/K1, 5/1, 5/3, 5/4, 5/K1, 5/K2, 5/K3, s.32/1, s.32/2, s.32/3, s.32/4, s.32/5, s.32/6, s.35/1, 13/1, 13/2*, 13/K1, 13/K+2, 27/1, 27/2, 27/4, 27/5, 27/K1, 27/K+1, 28/1, 28/2, 28/3*, 28/K1, 30/1, 30/3, 30/K1, 31/1, 31/2*, 31/4, 31/5, 31/7, 31/K1, 31/K+1, 31/K+2, 42/5 >> 51 kpl
IV	1/1, 6/4, 7/5, 7/K2, 11/K+1, s.69/3, 17/2*, 17/K1*, 22/K3, 22/K+2, 22/K+3, 25/1, 25/2, 25/K+1, 28/K1 >> 15 kpl
V	5/2, 13/3, 19/K+2, 27/K2 >> 4 kpl
VI	
VII	
VIII	

KAT	YYKAAKOO 3B
I	6/K2, 6/K+1**, 7/4*, 8/K+1, 9/K+1*, s.51/2, 12/1, 16/1*, 16/K1*, 17/L2*, 19/K+1, 20/K+3, 22/K+1, s.105/1*, s.105/2, 23/2, 23/3, 23/K2, 24/1*, 24/2*,

	24/3*, 24/5, 24/K2, 25/L1*, 26/2, 26/L2, 27/L+2, 28/6, 29/3, s.139/1, 37/1*, 37/3*, 38/1**, 38/2*, 38/K2, 39/1*, 39/3, 40/1, 40/2*, s.207/1, s.207/2 >> yht. 41kpl
II	4/L1, 4/L2, 4/L3, 4/L4, 4/L5, 4/L+1, 4/L+2, 5/4*, 5/L2, 6/3, 6/6, 6/K1, 6/L+2, 6/L+3, 7/4*, 7/5*, 7/L3, 7/L4, 7/K+1, 8/3, 8/4, 8/5, 8/6, 8/L2, 8/L3, 8/L4, 10/1, 10/2, 10/3, 10/4, 10/5, 10/L1, 10/L2, 10/L3, 10/K1, 10/L+1, 10/L+2, 10/K+1, s.48/1, s.48/2, s.48/3, s.48/4, s.48/5, s.48/6, 18/K+2, 19/L1, 20/L+1, 20/K+2, 23/1, 40/K+2, 23/4, 23/K1, 24/1*, 24/3*, 24/4, 24/L3, 24/K1, 24/K+1, 25/L+2, 25/K+*, 26/4, 26/5, 26/K+1, 27/L2, 29/L+2, 30/K+2, 31/L+1, 31/L+3, 31/K+3, 34/K+1, 35/K+1*, s.166/3, s.166/4, s.166/5, 37/1*, 37/5, 38/1**, 38/L1, 38/L+1, 38/K+1, 39/1*, 39/6, 39/7, 40/4, 40/K+1 >> yht. 85 kpl
III	5/1*, 5/2*, 5/3, 5/K1, 5/K+1, 6/K+1**, 8/L+2, 9/K+1*, 22/K+2*, 24/2*, 25/1, 25/2, 25/3, 25/4, 25/L1*, 25/K1, 25/K+1*, 26/1, 26/K1, 29/2, s.139/2, 37/3*, 37/4, 37/K2, 38/1**, 38/2*, 38/K1, 39/4, 40/2* >> yht. 29kpl
IV	17/K1, 34/2, 36/K1, 36/K2, 36/L+1 >> yht. 5kpl
V	13/3, 14/5, 14/L1, 14/K1, 15/2, 15/3, 15/4, 15/5, 16/1*, 16/2, 16/3, 16/4, 16/5, 16/6, 16/K1*, 16/K+1, 17/3, 17/4, 17/L1, 17/L2*, 17/L3, s.105/1*, 23/L+1, 26/6, 35/K+1*, 36/K+1 >> yht. 26kpl
VI	
VII	4/1, 4/5, 4/6, 4/K1, 4/K+1, 4/K+2, 5/1*, 5/2*, 5/4*, 6/K+1**, 6/K+2, 7/5*, 9/2, 9/7, 9/8, 9/9, 9/L2, s.51/3, s.51/4, 22/1, 22/2, 22/L+1, 22/K+2*, 30/K+1 >> yht. 24kpl
VIII	10/6, 12/L+1, 12/L+2, 12/L+3, 15/K+1, 27/L+1, 28/L+1 >> yht. 7kpl